Технички факултет Битола

ТЕОРИЈА НА ЕЛ. КОЛА

4. Одзив во временски домен - 1 дел -

проф. д-р Митко Костов

Воведни поими од теорија на системи

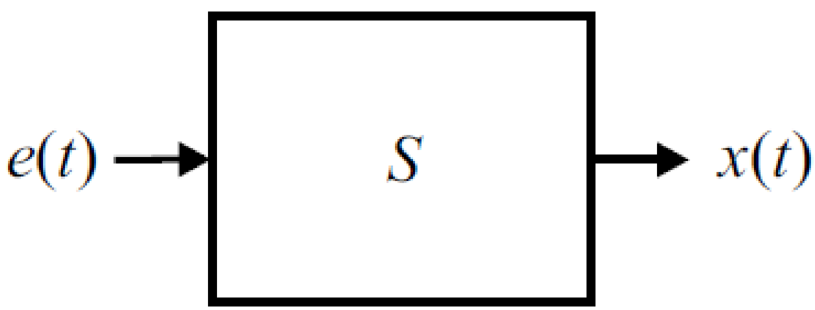
Променливите во функција од време во колото, напоните и струите, се делат на:

– **Ексцитација $\boldsymbol{e(t)}$** $(u_g(t),\, i_g(t))$ – од напред познати,

– **Одзив $\boldsymbol{x(t)}$** (сите останати напони и струи) – не се познати.

Ексцитацијата се нарекува уште влез (влезен сигнал), а одзивот – излез (излезен сигнал).

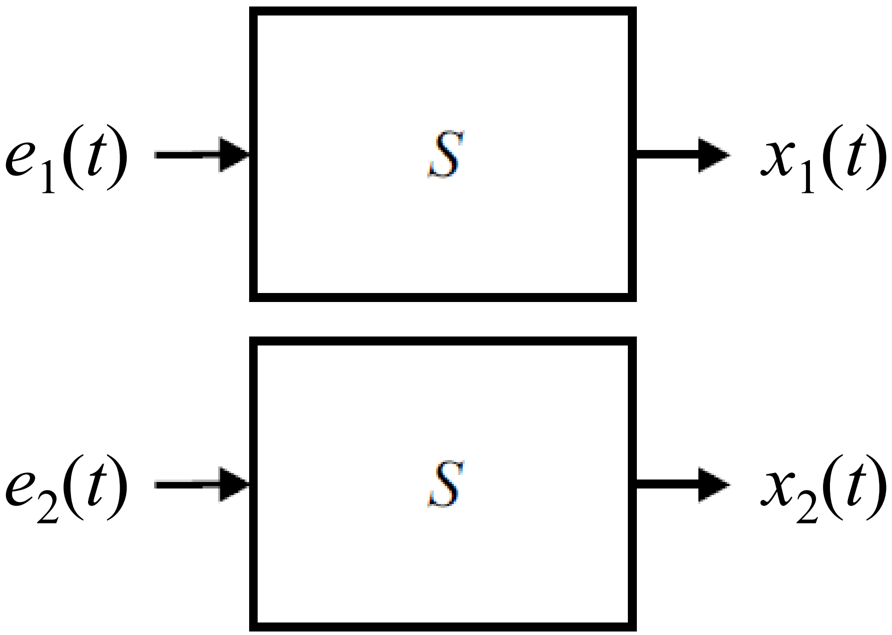
Симболички:



$$x(t) = S\{e(t)\}$$

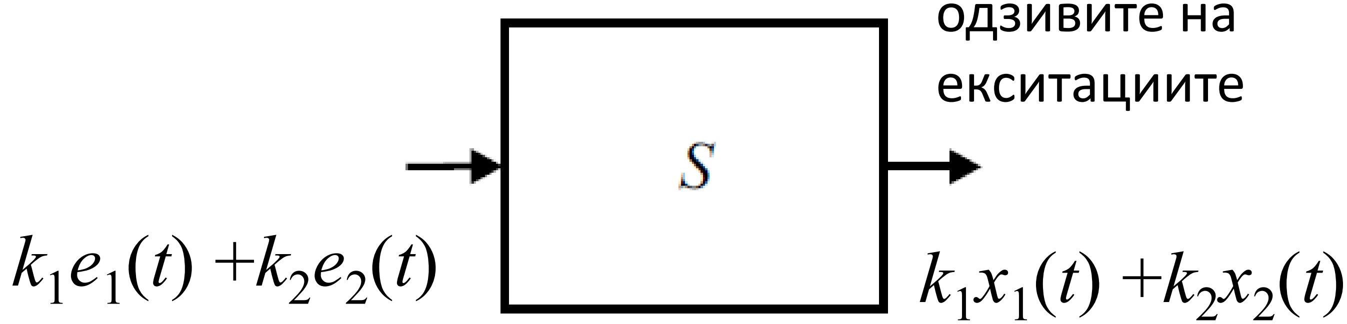
S – оператор кој треба да се примени на ексцитацијата за да го даде одзивот

Линеарен систем



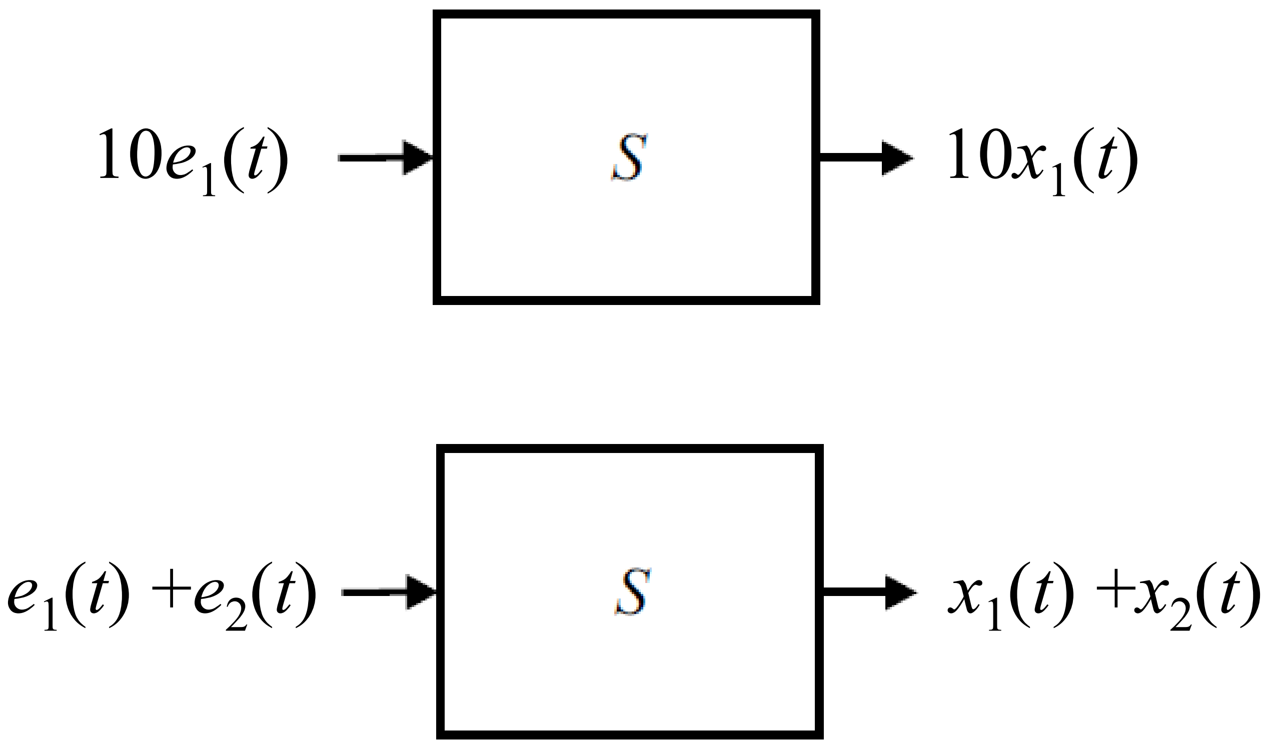
Линеарна комбинација од одзивите на екситациите

Линеарна комбинација од екситации

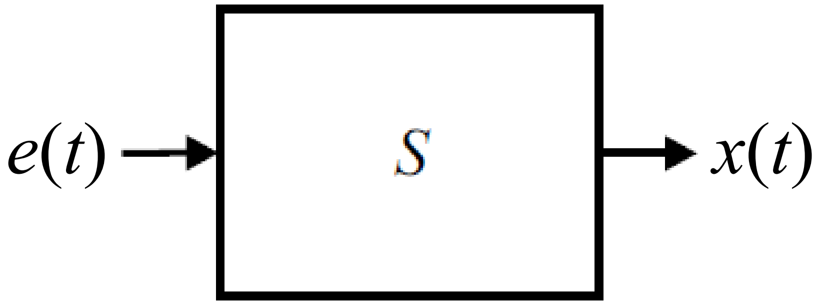


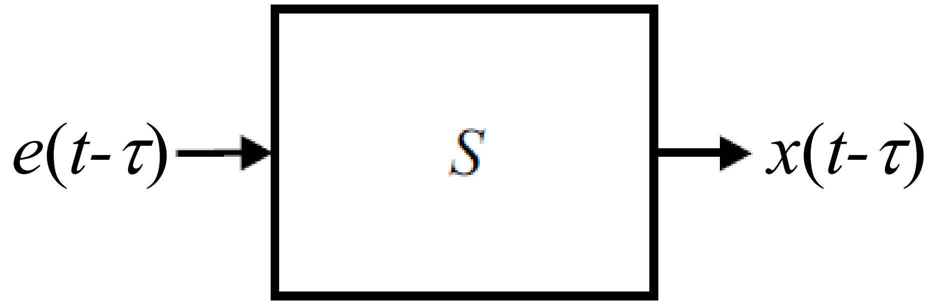
Линеарен систем

Пр.

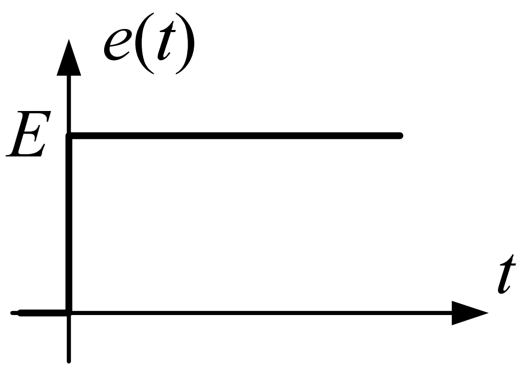


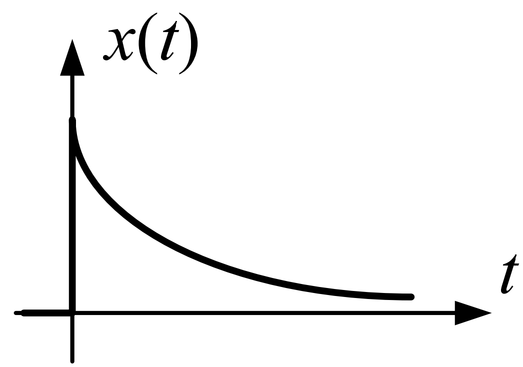
Временски непроменлив систем (стационарен, перманентен, автономен)



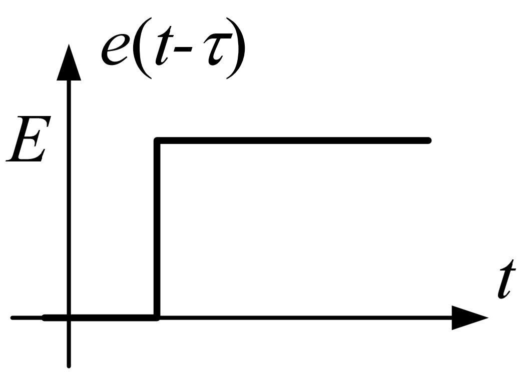


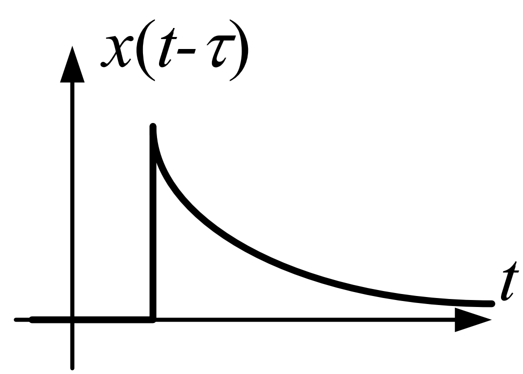
Ако





Тогаш





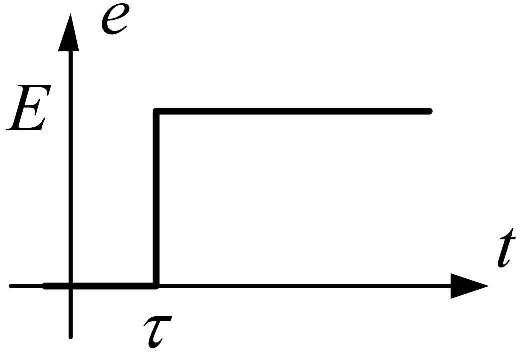
Каузален систем

Систем во кој одзивот до моментот t_0 не зависи од екситацијата после тоа t_0, т.е. сегашниот одзив не зависи од идните вредности на екситацијата. Одзивот во t_0 зависи само од екситацијата до $t_{0.}$

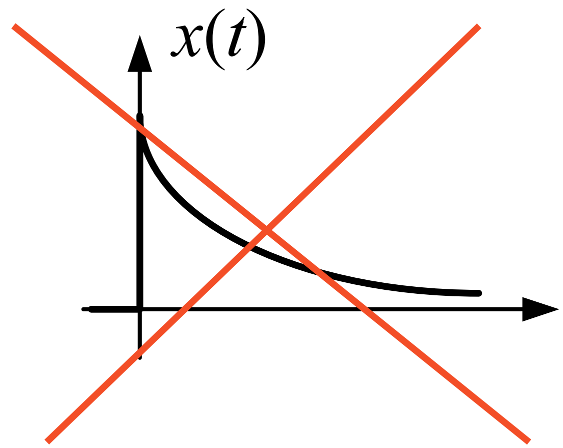
$$\boxed{\text{Ако } \boldsymbol{e(t)=0} \text{ за } \forall t < t_0 \Rightarrow \boldsymbol{x(t)=0} \text{ за } \forall t < t_0}$$

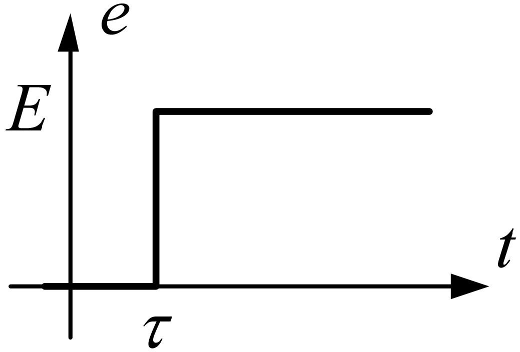
$\mathrm{x}(t_0)$ зависи од $e(t)$ за $t < t_0$

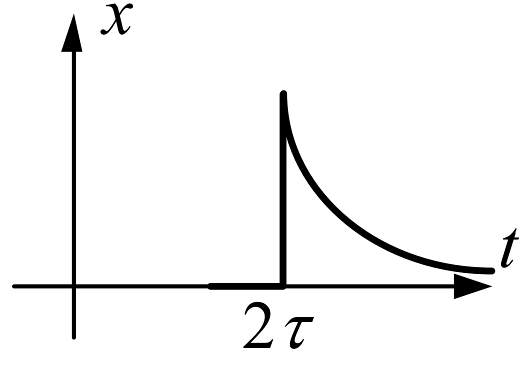
Каузален систем



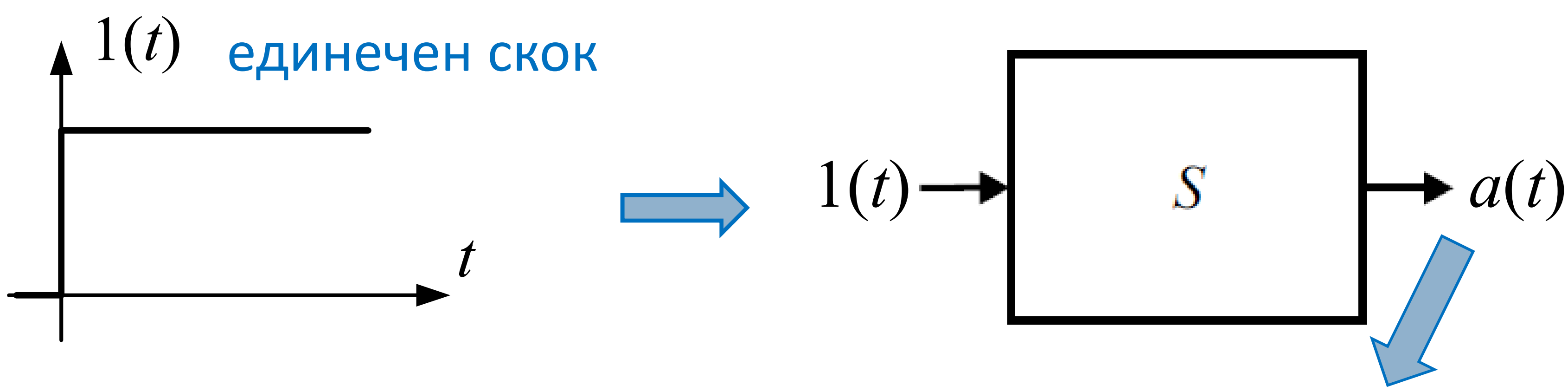
не е каузален



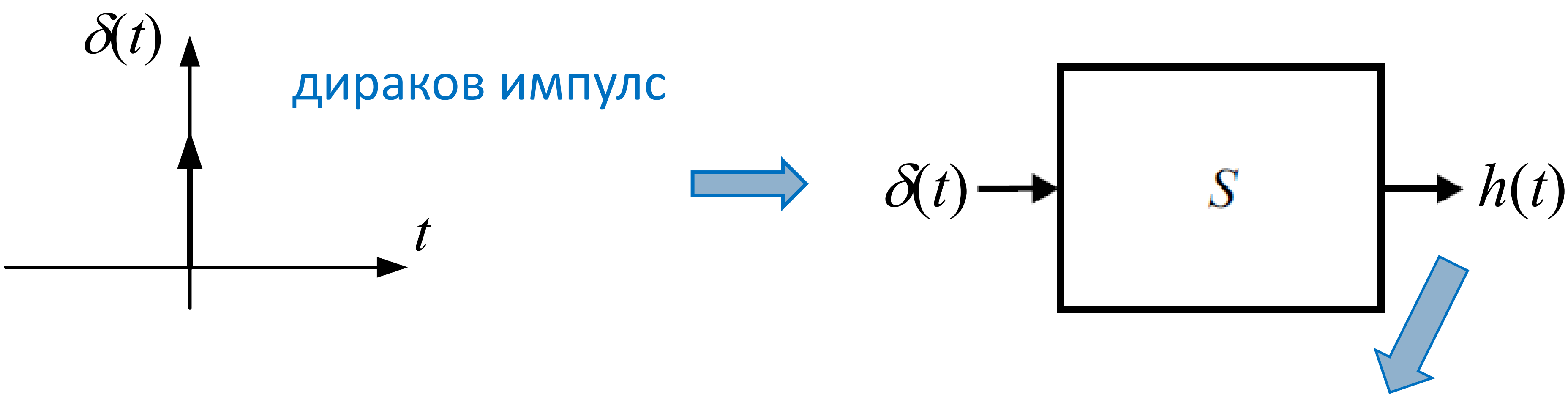




Индиционен и импулсен одзив



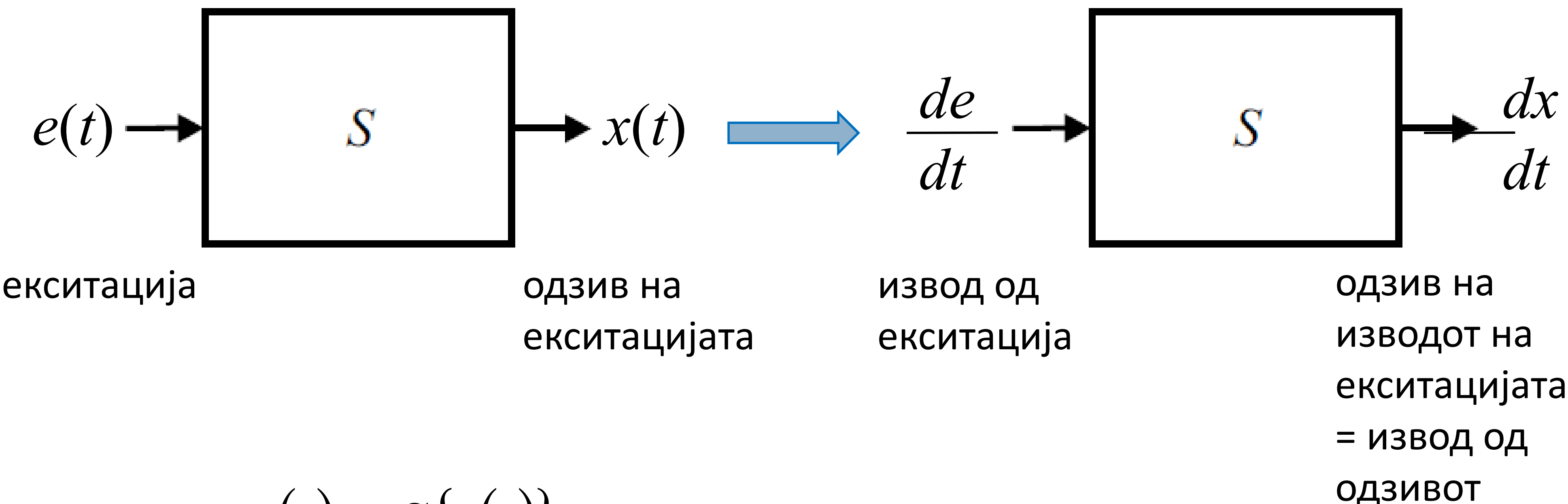
$a(t) = S\{1(t)\}$ - индиционен одзив (единечен одзив)



$h(t) = S\{\delta(t)\}$ - импулсен одзив

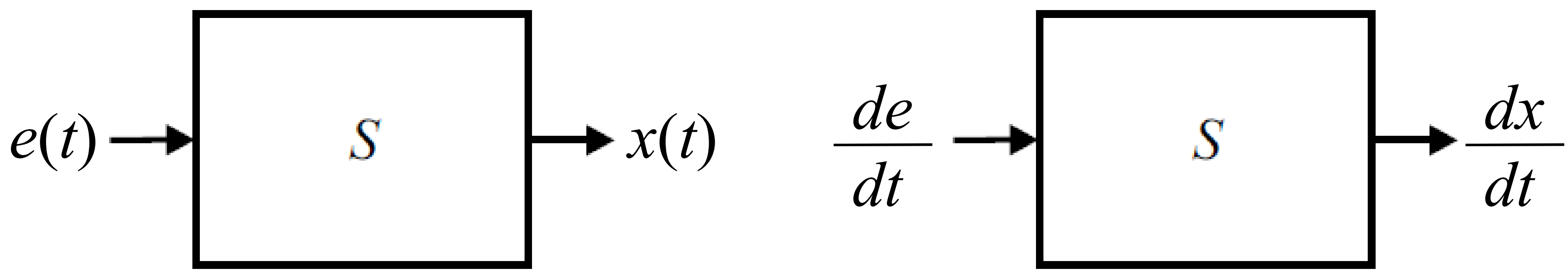
Теорема

Во линеарни и перманентни системи, одзив на изводот на екситацијата е извод на одзивот на екситацијата.



$$x(t) = S\{e(t)\}$$

Теорема



Доказ:

Нека $x(t) = S\{e(t)\}$

Бидејќи системот е перманентен → $x(t+\Delta t) = S\{e(t+\Delta t)\}$

Бидејќи системот е линеарен →

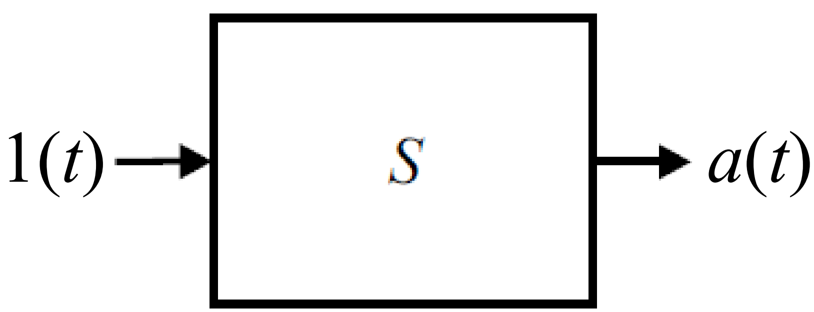
$$\frac{1}{\Delta t}x(t+\Delta t) - \frac{1}{\Delta t}x(t) = S\left\{\frac{1}{\Delta t}e(t+\Delta t) - \frac{1}{\Delta t}e(t)\right\}$$

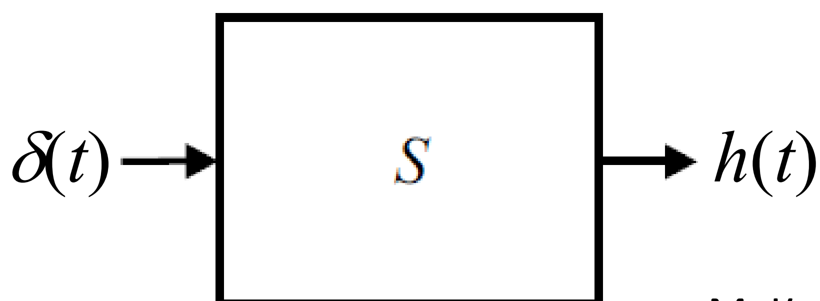
Теорема

Доказ (прод.):

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = S\left\{\frac{de}{dt}\right\}}$$

ова значи од $\boxed{\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{h(t) = \frac{da(t)}{dt}}$





Индиционен и импулсен одзив

$$\boxed{h(t) = \frac{da(t)}{dt}}$$

Заклучок:

Ако се познава индициониот одзив $a(t)$, лесно може да се најде и импулсниот одзив $h(t)$.

Технички факултет Битола

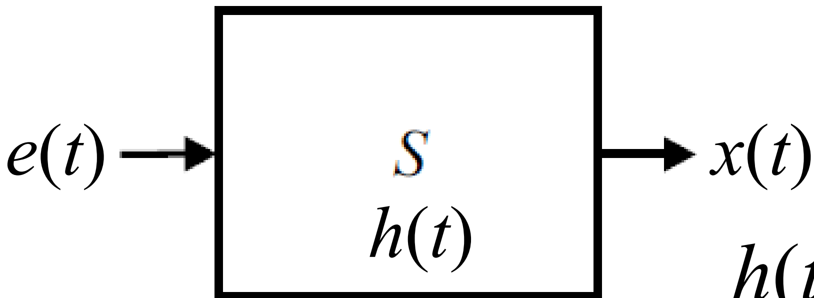
ТЕОРИЈА НА ЕЛ. КОЛА

4. Одзив во временски домен - 2 дел -

проф. д-р Митко Костов

Суперпозициски интеграл

Со познавање на импулсниот одзив $h(t)$, може да се одреди одзивот $x(t)$ на дадена екситација $e(t)$.



$$h(t) = S\{\delta(t)\}$$ - импулсен одзив

$$x(t) = \int_0^t e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

суперпозициски интеграл

сврти и влечи

Суперпозициски интеграл

Одзивот $x(t)$ <u>потекнува само од дејството на екситација</u> $e(t)$.

Во моментот $t = 0$, кога $e(t)$ е применета, системот е во релаксирана состојба – **не располага со енергија**.

Симболички:

$$x(t) = h(t) * e(t)$$

$$x(t) = \int_0^t e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Променливата τ, поради тоа што системот е каузален, добива **најголема вредност $\tau = t$, а најмала $\tau = 0$**.

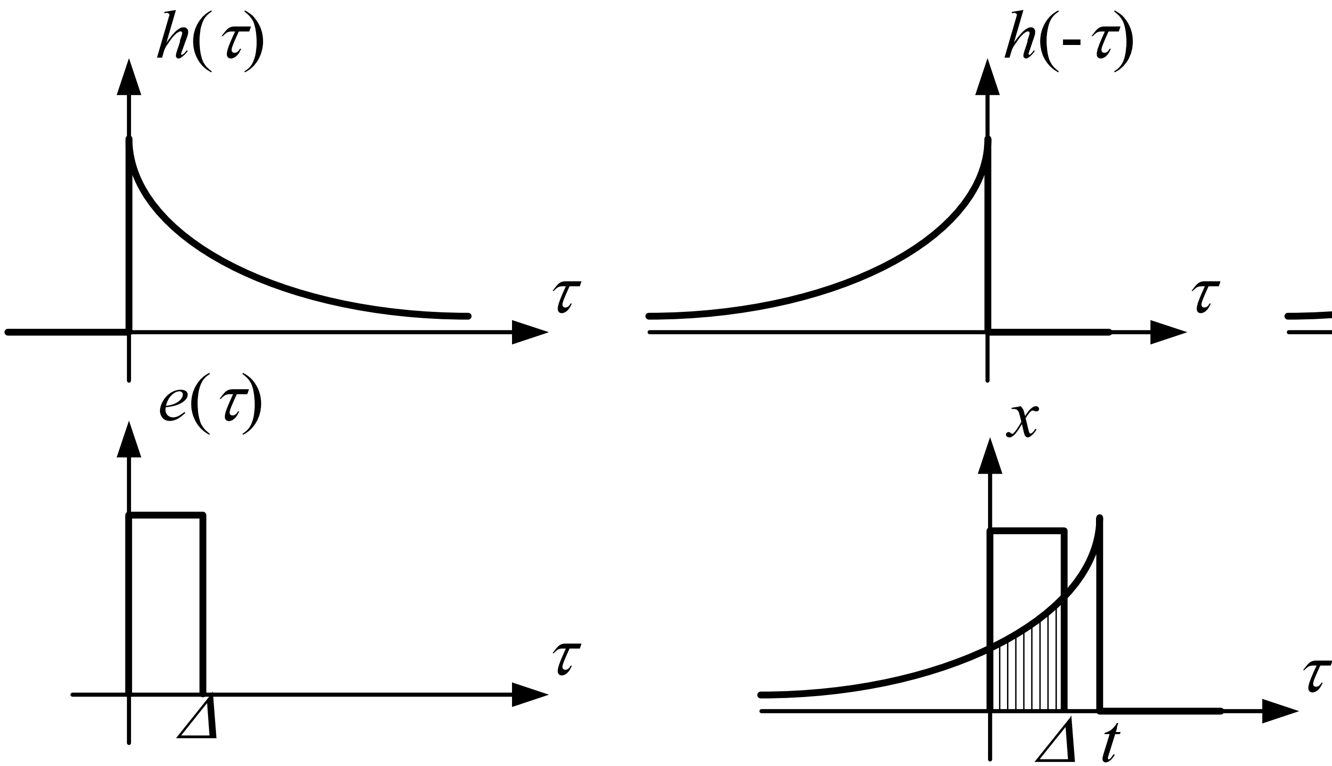
Не може да се добие одзив пред делувањето на екситацијата.

Двете функции се каузални, т.е.:

$$e(t) = 0, \qquad t < 0$$

$$h(t) = 0, \qquad t < 0$$

Суперпозициски интеграл



$$\int_0^t = \int_0^\Delta + \cancelto{0}{\int_\Delta^t}$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^\Delta \cdots & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases}$$

Суперпозициски интеграл

Редоследот меѓу e и h не е битен:

$$x(t) = \int_0^t e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t h(\tau)\, e(t-\tau)\, d\tau$$

Доказ:

$$x(t) = e(t) * h(t) = \int_0^t e(\tau) h\underbrace{(t-\tau)}_{} d\tau = \int_t^0 e(t-\theta) h(\theta)(-d\theta)$$

$$\theta = t - \tau, \quad \tau = t - \theta, \quad d\tau = dt - d\theta$$

$$= \int_0^t h(\theta) e(t-\theta) d\theta = h(t) * e(t)$$

Конволуција

Конволуција на $f_1(t)$ и $f_2(t)$:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Суперпозицискиот интеграл е конволуција на две функции $h(t)$ и $e(t)$ во ограничен интервал [0, t].

Ако $f_1(t) = 0$ за $t < 0$ $\Rightarrow$ $\int_{0}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ f_1 - каузална

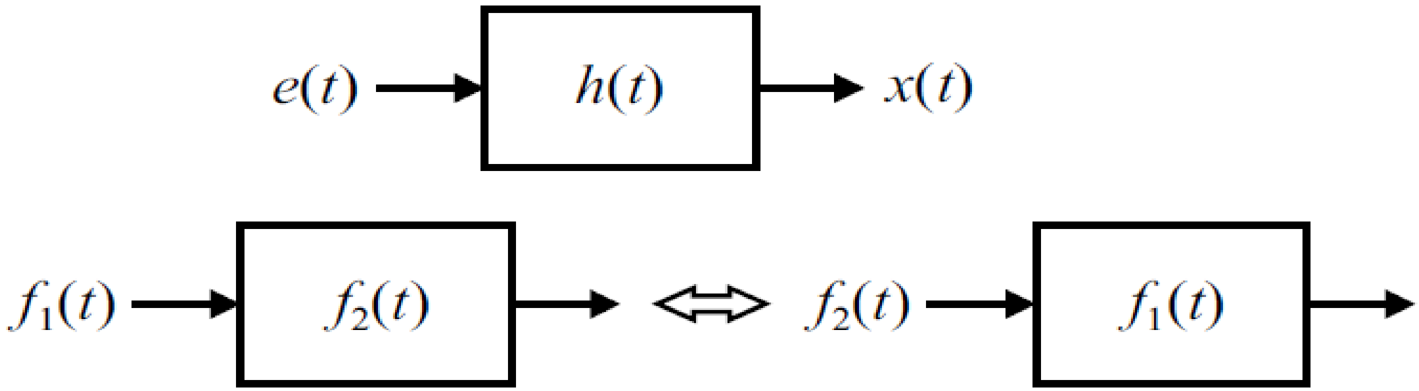
Ако $f_2(t) = 0$ за $t < 0$ $\Rightarrow$ $\int_{0}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ f_2 - каузална

(или $f_2(t-\tau) = 0$ за $t > \tau$)

Конволуција

Редоследот меѓу $f_1(t)$ и $f_2(t)$ не е битен:

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$ комутативност



Важи и асоцијативност и дистрибутивност во однос на собирање:

$$f_1*(f_2*f_3)=(f_1*f_2)*f_3$$

$$f_1*(f_2+f_3)=f_1*f_2+f_1*f_3$$

Технички факултет Битола

ТЕОРИЈА НА ЕЛ. КОЛА

4. Одзив во временски домен - 3 дел -

д-р Митко Костов

Компоненти на одзивот

1. Слободен одзив (сопствен, природен)

Ако во колото **<u>има енергија</u>, а <u>не делува екситација</u>**, одзивот се вика **слободен**.

Енергијата што постои е резултат на делувањето претходно на некаква екситација.

$$\begin{cases} e(t) = 0, & t \geq 0 \\ \omega(0) \neq 0, & \text{има акумулирана енергија (во реактивните елементи) во } t = 0 \end{cases}$$

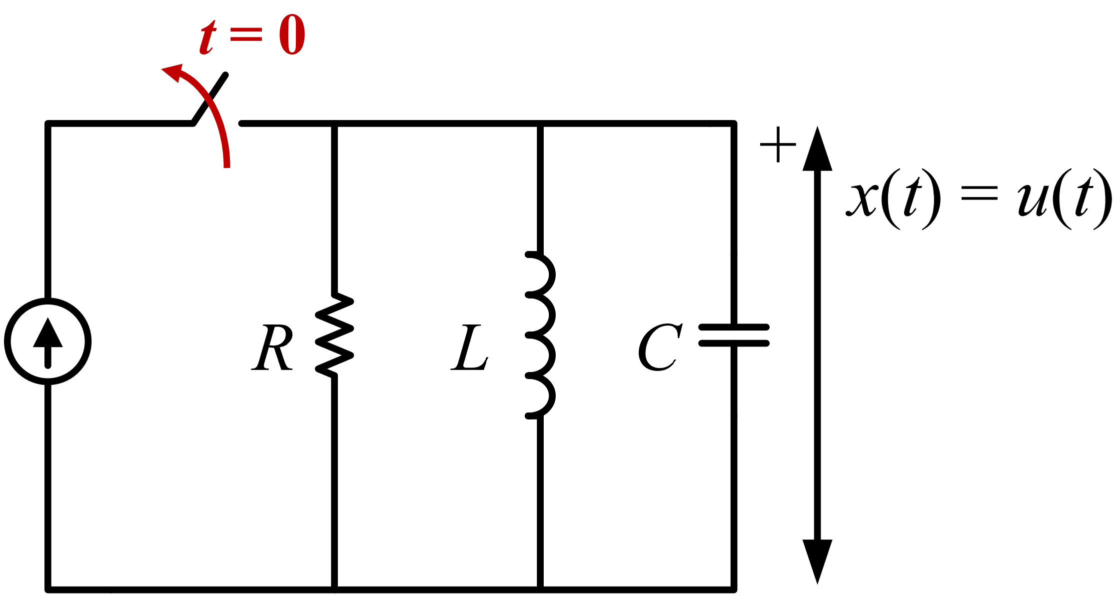
Значи, ако во $t = 0\_$ има енергија во колото $\Rightarrow$

- мора да има барем еден реактивен елемент: кондензатор или индуктивен елемент
- $\omega(0) \neq 0$.

Компоненти на одзивот

1. Слободен одзив (сопствен, природен)

Пр.



Нека $\omega(0_-) = \frac{1}{2} L i_L^2(0_-) + \frac{1}{2} C u_C^2(0_-) \neq 0$

$\Rightarrow$ до $t = 0$ делувале некои екситации

Компоненти на одзивот

1. Слободен одзив (сопствен, природен)

Фази:

– дефиниција на елементите

– КЗС

– КЗН

по пишувањето на равенките мора да се јави **барем еден извод**

– потоа следи елиминација на сите променливи (напони и струи), освен одзивот (напон или струја)

– се добива **диференцијална равенка** (зависно од бројот и распоредот на елементите), која е линеарна и хомогена со константни коефициенти

Компоненти на одзивот

1. Слободен одзив (сопствен, природен)

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = 0$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ зависат од R, L и C (пр. $a_1 = RC/L$)

n – еднакво и помало од бројот на реактивни елементи

Компоненти на одзивот

1. Слободен одзив (сопствен, природен)

$$\boxed{\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = 0}$$

Решавање на диференцијалната равенка:

Се пишува карактеристичната равенка на дифер. равенка:

$$\boxed{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0}$$

Оваа равенка има *n* корени: $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (сопствени фреквенции), кои зависат од колото, т.е. само од коефициентите $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Компоненти на одзивот

1. Слободен одзив (сопствен, природен)

а) Решение за слободниот одзив (ако сите корени се различни):

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \cdots + A_n e^{s_n t}, \qquad t \geq 0$$

константи што зависат од енергијата во колото, т.е. од почетните услови: напони на C во t=0, струи на L во t=0

Сега се бараат изводи на $x(t)$ во $t = 0_+$:

$$x(0_+), \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0_+}, \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0_+}, \ldots, \left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_{t=0_+}$$

Компоненти на одзивот

1. Слободен одзив (сопствен, природен)

$$\frac{dx}{dt} = s_1 A_1 e^{s_1 t} + s_2 A_2 e^{s_2 t} + \cdots + s_n A_n e^{s_n t}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = s_1^{\,n-1} A_1 e^{s_1 t} + \cdots + s_n^{\,n-1} A_n e^{s_n t}$$

Ако се познаваат: $x(0_+), \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0_+}, \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0_+}, \ldots, \left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_{t=0_+}$

може да се најдат константите A_1, A_2, ...

Компоненти на одзивот

1. Слободен одзив (сопствен, природен)

$$
\begin{aligned}
A_1 + A_2 + \cdots + A_n &= x(0_+) \\
s_1 A_1 + s_2 A_2 + \cdots + s_n A_n &= \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0_+} \\
\cdots &= \cdots \\
s_1^{n-1} A_1 + s_2^{n-1} A_2 + \cdots + s_n^{n-1} A_n &= \left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_{t=0_+}.
\end{aligned}
$$

→ n равенки со n непознати

Компоненти на одзивот

1. Слободен одзив (сопствен, природен)

б) Решение за слободниот одзив (повеќекратен корен):

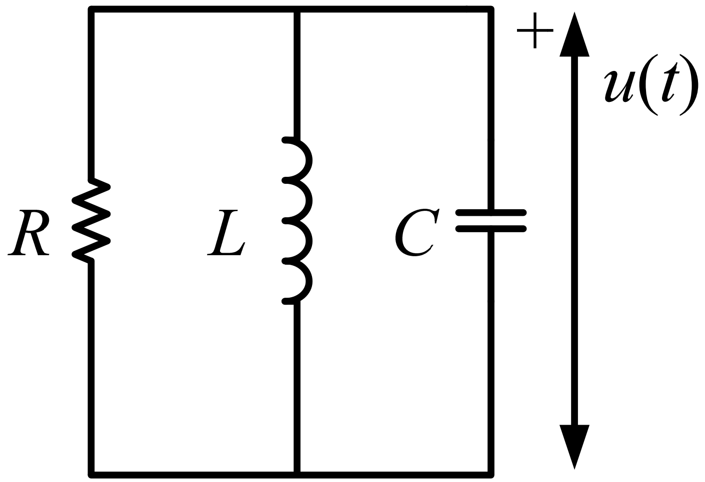
$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 t e^{s_1 t} + A_3 t^2 e^{s_1 t} + A_4\, e^{s_4 t} + \cdots + A_n e^{s_n t}$$

(пр. за трикратен корен во $s = s_1$)

Компоненти на одзивот

1. Слободен одзив (сопствен, природен)

Пр.



$$u_C(0)=U_0$$

$$i_L(0)=I_0$$

$$\omega(0)=\frac{1}{2}LI_0^2+\frac{1}{2}CU_0^2$$

$$\left.\begin{aligned} u(t)&=R\cdot i_R(t)\\ i_C(t)&=C\frac{du}{dt}\\ u(t)&=L\frac{di_L}{dt}\\ i_R+i_L+i_C&=0 \end{aligned}\right\}$$

Нека $x(t)=i_R(t)$

Која е насоката на i_R за насоките на напонот и струјата да бидат усогласени?

Елиминација на i_L, i_C, $u(t)$

Компоненти на одзивот

1. Слободен одзив (сопствен, природен)

Се добива дифер. равенка:

$$\frac{d^2 i_R(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d i_R(t)}{dt} + a_2 i_R(t) = 0$$

$$s^2 + a_1 s + a_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} s_1 = \dots \\ s_2 = \dots \end{matrix}$$

Решението: $i_R(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

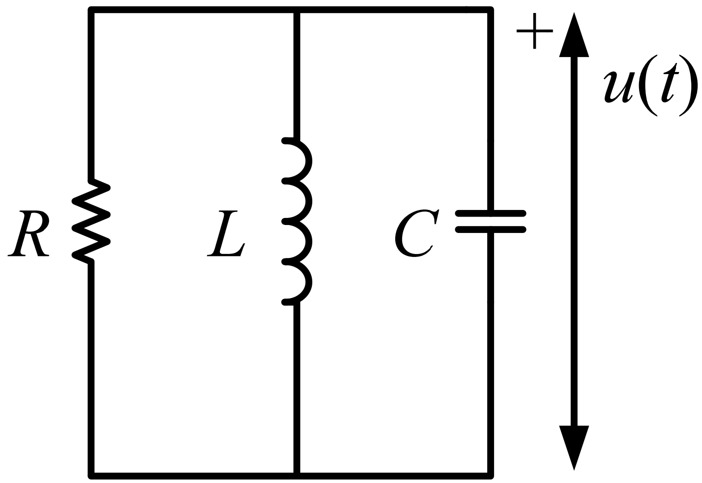
Треба да се најдат:

$$i_R(0_+) = A_1 + A_2$$

$$\left.\frac{d i_R(t)}{dt}\right/_{t=0} = s_1 A_1 + s_2 A_2$$

Компоненти на одзивот

1. Слободен одзив (сопствен, пр



$$u(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$i_C(t) = C\frac{du}{dt}$$

$$u(t) = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_R + i_L + i_C = 0$$

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} \quad \Rightarrow \quad i_R(0) = \frac{u(0)}{R} = \frac{U_0}{R}$$

$$\frac{di_R}{dt} = \frac{1}{R}\cdot\frac{du}{dt} = \frac{1}{R}\cdot\frac{C}{C}\cdot\frac{du}{dt} = \frac{1}{RC}\cdot i_C(t) = \frac{1}{RC}\cdot\left(-i_L - \frac{u(t)}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{di_R}{dt}\right)\Big/_{t=0} = \frac{1}{RC}\cdot\left(-I_0 - \frac{U_0}{R}\right)$$

Компоненти на одзивот

2. Форсиран одзив

Одзив **самo од екситацијата**, т.е. во моментот $t = 0$ **во колото нема енергија**:

$$\begin{cases} e(t) \neq 0, & t \geq 0 \\ \omega(0) = 0, & \text{нема акумулирана енергија } (u_C(0) = 0,\ i_L(0) = 0) \text{ во } t = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = \underbrace{b_0 \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{de(t)}{dt} + b_m e(t)}_{f(e(t)) \text{ - познато}}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ се реални

$f(e(t))$ - познато

Компоненти на одзивот

2. Форсиран одзив

Кога колото е линеарно и перманентно, проблемот се сведува на:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$x_h(t)$ – општо решение на хомогената дифер. равенка (преодна компонента на форсираниот одзив)

$x_p(t)$ – партикуларно решение на нехомогената дифер. равенка (принуден одзив) – зависи од екситацијата

За општото решение $x_h(t)$ важи:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

→ $s_1 = \ldots$ $s_2 = \ldots$

Компоненти на одзивот

2. Форсиран одзив

Решението е:

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \cdots + A_n e^{s_n t} + x_p(t)$$

Константите не се познати

Компоненти на одзивот

2. Форсиран одзив

Принудниот одзив е функција од истата класа функции како и екситацијата $e(t)$.

Ако екситацијата е const (пр. Хевисајдова функција) и x_p ќе биде const.
Ако екситацијата е простопериодична функција и x_p ќе биде простопериодична функција со иста фреквенција.

Ако во колото има калем и/или кондензатор:
Калем: Ако екситацијата е const → струјата е const → напонот на L е нула ($u_L = L di_L/dt$) → кратко се спојува
Кондензатор: Ако екситацијата е const → напонот е const → струјата низ C е нула ($i_C = C du_C/dt$) → гранката се откинува

Компоненти на одзивот

2. Форсиран одзив

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \cdots + A_n e^{s_n t} + x_p(t)$$

Одредување на константите $A_1, A_2, \ \ldots \ , A_n$:
(не зависат од акум.енергија, туку од екситацијата и нејзините изводи)

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = x(0_+) - x_p(0_+)$$

$$s_1 A_1 + s_2 A_2 + \cdots + s_n A_n = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0_+} - \left(\frac{dx_p}{dt}\right)_{t=0_+}$$

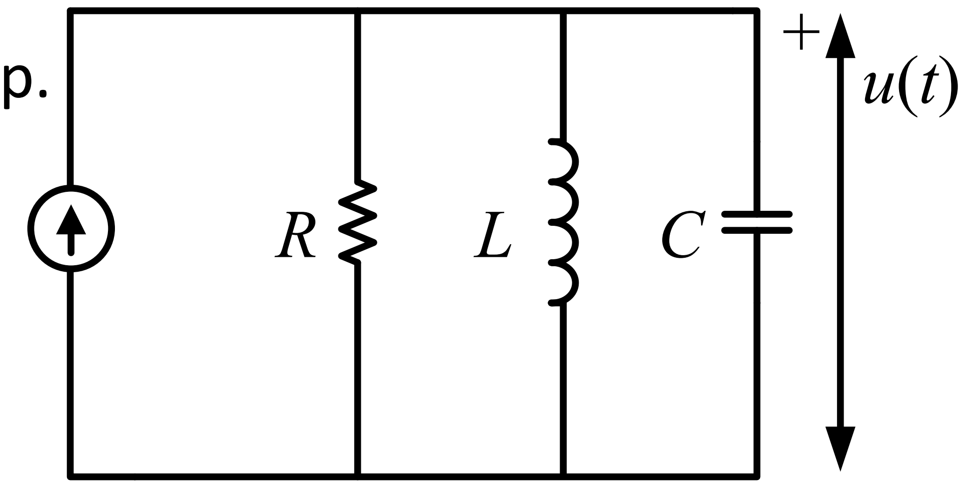
$$\cdots = \cdots$$

$$s_1^{n-1} A_1 + s_2^{n-1} A_2 + \cdots + s_n^{n-1} A_n = \left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_{t=0_+} - \left(\frac{d^{n-1}x_p}{dt^{n-1}}\right)_{t=0_+}$$

Компоненти на одзивот

2. Форсиран одзив

Пр.



$$u_C(0)=0$$
$$i_L(0)=0$$
$$\omega(0)=0$$

Нека $x(t)=i_R(t)$

$$u(t)=R\cdot i_R(t)$$
$$i_C(t)=C\frac{du}{dt}$$
$$u(t)=L\frac{di_L}{dt}$$
$$i_R+i_L+i_C=i_g$$

$$\frac{d^2 i_R(t)}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{di_R(t)}{dt}+\frac{1}{LC}i_R(t)=\frac{1}{RC}\frac{di_g}{dt}$$

Компоненти на одзивот

2. Форсиран одзив

Пр. $i_R = i_{Rh} + i_{Rp}$

Ако $i_g = I_G = \mathrm{const}$

1. со замена на $i_R = \mathrm{const}$ и $i_g = \mathrm{const}$ во
диференцијалната равенка → $i_{Rp} = 0$

2. C – прекинато коло, L – куса врска
цела струја од i_g низ кусата врска → $i_{Rp} = 0$

→ $i_{rp} = 0$

Компоненти на одзивот

3. Комплетен одзив

Одзив на екситацијата која се вклучува во моментот кога колото има енергија:

$$\begin{cases} e(t) \neq 0, & t \geq 0 \\ \omega(0) \neq 0, & \text{има акумулирана енергија} \end{cases}$$

$(u_C(0) = U_0$ и/или $i_L(0) = I_0)$ во $t = 0$

Комплетен одзив = слободен одзив + форсиран одзив

Компоненти на одзивот

3. Комплетен одзив

Комплетен одзив = слободен одзив + форсиран одзив

форсиран одзив = преодна компонента на форсиран одзив + принуден одзив $= x_f$

$$x(t) = \underbrace{x_s(t) + x_h(t)}_{x_t} + x_p(t), \qquad x_f = x_h(t) + x_p(t)$$

$x_h(t)$ – преодна компонента на форсиран одзив

x_t – преоден одзив

$$x(t) = x_t(t) + x_p(t) = x_s(t) + x_f(t)$$

$x_t(t)$ – преоден

$x_s(t)$ – слободен

$x_p(t)$ – принуден

$x_f(t)$ – форсиран