# АНАЛИТИЧКА АНАЛИЗА НА ПОЗИЦИИТЕ, КИНЕМАТИКАТА И ДИНАМИКАТА НА ЛОСТОВ МЕХАНИЗАМ ОД ВТОРА КЛАСА КОЈ СОДРЖИ ДИЈАДА ОД ВИДОТ „РТР“

Ред. проф. д-р Дејан Трајковски

*Технички факултет – Битола*
*Универзитет „Св. Климент Охридски“ – Битола*
Ул. Иво Лола Рибар бб., Битола, Р. Македонија
+389 47 207 753
dejan.trajkovski@uklo.edu.mk

## АБСТРАКТ

Во трудот е изложена целосно аналитичка метода за анализа на позициите, брзините, забрзувањата, силите и моментите во сите кинематски парови кај четиричлен лостов механизам од втора класа кој содржи дијада составена од ротирен, транслаторен и ротирен кинематски пар (РТР). Механизмите од овој вид, заради сложеноста на пресметките, традиционално се решавани графички. За разлика од графичката метода, која често не задоволува во поглед на точноста, во трудот е изложен алгоритам за аналитичко решавање, врз чија основа се извршени конкретни компјутерски пресметки и се презентирани резултати. Методата, покрај теоретско и наставно, има и практично значење при проектирањето на дадениот вид механизми.

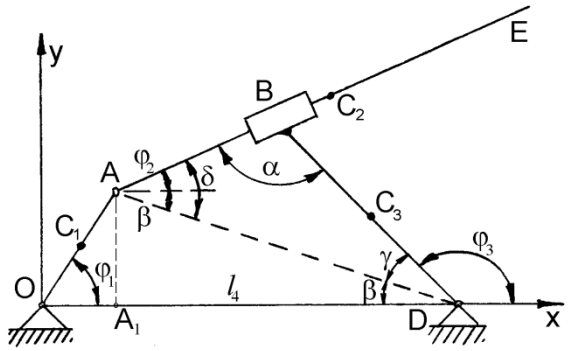
*Клучни зборови:* аналитичко решение, дијада РТР, кинематска и динамичка анализа

## 1. ВОВЕД

Најголем број од индустриските механизми содржат кинематски групи од втора класа (дијади) и за нивно решавање во литературата [1,2] се опишани графички и графоаналитички методи. Со развојот на компјутерите се јави потреба од развој на аналитички и нумерички методи за нивно решавање. Во постоечката литература се сретнуваат аналитички методи за позициона анализа на механизми од II и III класа [3], но целосни аналитички решенија за кинематиката и динамиката се ретки, и тоа само во случај на дијади од типот РРР, т.е. без транслаторни кинематски парови (лизгачи). Во овој труд е изложена аналитичка метода за комплетна позициона, кинематска и динамичка анализа на четиричлен механизам кој содржи дијада од видот РТР. Идејата е да се постават векторски равенки и од нив аналитички да се најдат растојанијата и аглите на сите кинематски парови. Потоа, со директни диференцирања да се најдат сите брзини и забрзувања, избегнувајќи векторски равенки и графичко решавање на истите. На крај, динамичката анализа се врши преку рекурзивна Њутн-Ојлерова постапка во аналитичка форма и некои од резултатите се прикажани дијаграмски.

## 2. ПОЗИЦИОНА АНАЛИЗА

Разгледуваме четиричлен механизам составен од три подвижни и еден неподвижен член, поврзани меѓусебно со ротирните кинематски парови (зглобови) O, A, D и транслаторниот пар (лизгачот) B (сл. 1).




Сл. 1. Механизам од II класа (дијада РТР)

Должините на лостовите се $l_1=l_{OA}$, $l_2=l_{AE}$, $l_3=l_{BD}$. $l_4=l_{AD}$ е растојанието меѓу неподвижните оски A и D, при што мора $l_1+l_3<l_4,\ l_2+l_3>l_1+l_4$.

$\alpha=\angle ABD=const.$ е аголот мегу членовите 2 и 3, а $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$се аглите кои членовите ги зафаќаат со оската x, при што аголот $\varphi_1$ е генерализирана координата на дадениот механизам. Преку овој агол ги определуваме сите линиски и аголни координати на дадениот механизам

За произволна вредност на аголот $\varphi_1$го определуваме растојанието $l_{AD}(\varphi_1)$ од ΔOAD, а потоа со примена на косинусната теорема на ΔABD доаѓаме до израз за растојанието $l_{AB}(\varphi_1)$ кој ја опишува положбата на лизгачот B.

$$l_{AD}(\varphi_1)=\sqrt{l_1^2\cdot\sin^2\varphi_1+(l_4-l_1\cdot\cos\varphi_1)^2} \tag{1}$$

$$l_{AB}(\varphi_1)=l_3\cdot\cos\alpha+\sqrt{l_{AD}^2(\varphi_1)-l_3^2\cdot\sin^2\alpha} \tag{2}$$

Од еднаквоста на висината $AA_1$ на $\Delta OAA_1$ и $\Delta AA_1D$ го определуваме аголот

$$\beta(\varphi_1)=\arcsin\left(\frac{l_1\cdot\sin\varphi_1}{l_{AD}(\varphi_1)}\right) \tag{3}$$

Со примена на синусната теорема на ΔABD, $\frac{l_{AD}}{\sin\alpha}=\frac{l_3}{\sin\delta}$, го наоѓаме и аголот

$$\delta(\varphi_1)=\arcsin\left(\frac{l_3\cdot\sin\alpha}{l_{AD}(\varphi_1)}\right) \tag{4}$$

Конечно, доаѓаме до аглите на лостовите 2 и 3:

$$\varphi_2(\varphi_1)=-\beta(\varphi_1)+\delta(\varphi_1)\ ,\quad \gamma(\varphi_1)=\pi-(\alpha+\delta(\varphi_1)), \tag{5}$$

$$\varphi_3(\varphi_1)=\pi-\big(\beta(\varphi_1)+\gamma(\varphi_1)\big)=\alpha+\ \delta(\varphi_1)-\beta(\varphi_1)=\alpha+\varphi_2(\varphi_1) \tag{6}$$

Со помош на погоре најдените агли ги определуваме координатите на центрите на масите на сите стапови, во вид на функции од генерализираната координата $\varphi_1$.

$$x_{C1}(\varphi_1)=l_{OC1}\cdot\cos\varphi_1\ ,y_{C1}(\varphi_1)=l_{OC1}\cdot\sin\varphi_1$$

$$x_{C2}(\varphi_1)=l_1\cdot\cos\varphi_1+l_{AC2}\cdot\cos\varphi_2\ ,\ \ y_{C2}(\varphi_1)=l_1\cdot\sin\varphi_1\ +l_{AC2}\cdot\cos\varphi_2$$

$$x_{C3}(\varphi_1)=l_4+l_{DC3}\cdot\cos\varphi_3\ ,y_{C3}(\varphi_1)=l_{DC3}\cdot\sin\varphi_3 \tag{7}$$

Менувајќи го $\varphi_1$во дијапазонот $0\le\varphi_1\le 2\pi$, од равенката (7/2) ја добиваме траекторијата т.е. „лостовата крива“ на тежиштето $C_2$ во параметарска форма (сл. 4).

## 3. КИНЕМАТСКА АНАЛИЗА

За разлика од графичкиот начин, каде брзините и забрзувањата ги определуваме со помош на векторски равенки, при аналитичкото решавање брзините и забрзувањата ги добиваме со директно диференцирање фукциите на координатите на центрите на масите и аглите на лостовите (рав. 5,6,7). Брзината на центарот $C_2$ ќе биде:

$$\overrightarrow{v_{C2}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_{C2}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r_{C2}}}{\mathrm{d}\varphi_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{r_{C2}}' \cdot \omega_1 \,, \qquad (8)$$

каде со $(\ldots)' = \frac{\mathrm{d}(\ldots)}{\mathrm{d}\varphi_1}$ се означени првите преносни функции, односно првите изводи на функциите по генерализираната координата $\varphi_1$. Скаларните компоненти на равенката (8) се:

$$v_{C2x}(\varphi_1) = -(l_1 \cdot \sin\varphi_1 + l_{AC2} \cdot \sin\varphi_2(\varphi_1) \cdot \varphi_2{}'(\varphi_1)) \cdot \omega_1$$

$$v_{C2y}(\varphi_1) = (l_1 \cdot \cos\varphi_1 + l_{AC2} \cdot \cos\varphi_2(\varphi_1) \cdot \varphi_2{}'(\varphi_1)) \cdot \omega_1 \qquad (9)$$

Компонентите на брзината на центарот на масата $C_3$, брзината $v_{32}$ на лизгачот B, како и аголните брзини на лостовите 2 и 3 ги наоѓаме со помош на соодветните преносни функции:

$$v_{32}(\varphi_1) = \frac{\mathrm{d}l_{AB}}{\mathrm{d}\varphi_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} = l'_{AB}(\varphi_1) \cdot \omega_1 \qquad (10)$$

$$\omega_2(\varphi_1) = \omega_3(\varphi_1) = \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}\varphi_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} = \varphi'_2(\varphi_1) \cdot \omega_1 \qquad (11)$$

Иако постојат изводите на непрекинатите функции (рав. 2, 5, 7), во интерес на просторот преносните функции можеме да ги најдеме преку конечни разлики:

$$\varphi'_2(\varphi_1) = \varphi'_3(\varphi_1) = \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}\varphi_1} \cong \frac{\varphi_2(\varphi_1+\Delta\varphi)-\varphi_2(\varphi_1-\Delta\varphi)}{2\Delta\varphi}, \text{ каде } \Delta\varphi = 10^{-6} \ll \varphi_1 \quad (12)$$

Забрзувањата ги наоѓаме со повторено диференцирање на равенката (8), водејќи сметка дека се работи за изводи на сложени функции:

$$\overrightarrow{a_{C2}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{C2}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{r_{C2}}' \cdot \frac{d\varphi_1}{dt}\right) = \overrightarrow{r_{C2}}' \cdot \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi_1}(\overrightarrow{r_{C2}}') \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\overrightarrow{a_{C2}} = \overrightarrow{r_{C2}}' \cdot \varepsilon_1 + \overrightarrow{r_{C2}}'' \cdot \omega_1^2 \,, \text{ каде } \varepsilon_1 = \frac{\mathrm{d}^2\varphi_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} \qquad (13)$$

Вторите преносни функции, а со нив и забрзувањата, ги пресметуваме исто така со конечни разлики. На пример:

$$a_{C2x}(\varphi_1) \cong \frac{x_{C2}(\varphi_1+\Delta\varphi)-x_{C2}(\varphi_1-\Delta\varphi)}{2\Delta\varphi} \cdot \varepsilon_1 + \frac{x_{C2}(\varphi_1+\Delta\varphi)-2x_{C2}(\varphi_1)+x_{C2}(\varphi_1-\Delta\varphi)}{\Delta\varphi^2} \quad (14)$$

На ист начин ги определуваме и забрзувањата $a_{C2y}(\varphi_1), a_{C1x}(\varphi_1), a_{C1y}(\varphi_1), a_{C3x}(\varphi_1), a_{C3y}(\varphi_1)$. Аголните забрзувања ќе бидат:

$$\varepsilon_2(\varphi_1) = \varepsilon_3(\varphi_1) \cong \frac{\varphi_2(\varphi_1+\Delta\varphi)-\varphi_2(\varphi_1-\Delta\varphi)}{2\Delta\varphi} \cdot \varepsilon_1 + \frac{\varphi_2(\varphi_1+\Delta\varphi)-2\varphi_2(\varphi_1)+\varphi_2(\varphi_1-\Delta\varphi)}{\Delta\varphi^2} \quad (15)$$

## 4. ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА

### 4.1. Инерцијални сили и моменти. Гравитациони сили.

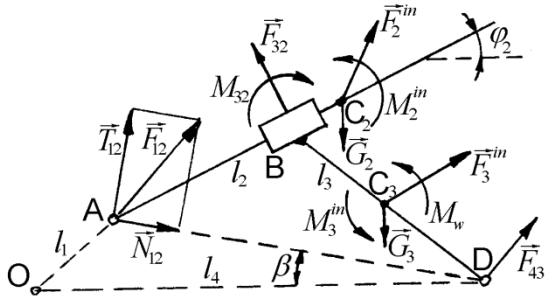
Динамичката анализа ја започнуваме со определување на инерцијалните сили и моменти во сите кинематски членови како функции од генерализираната коорд. $\varphi_1$.

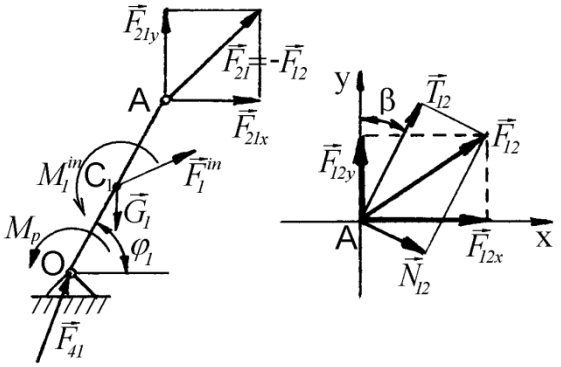
$$F_{ix}^{in}(\varphi_1) = -m_i \cdot a_{Cix},\ F_{iy}^{in}(\varphi_1) = -m_i \cdot a_{Ciy},\ M_i^{in}(\varphi_1) = -J_{Ci} \cdot \varepsilon_i;\ \text{i=1,2,3} \quad (16)$$

Гравитационите сили дејствуваат во центрите на масите на сите лостови:

$$G_{ix} = 0\,,\ G_{iy} = -m_i g;\ \ i = 1,2,3 \tag{17}$$

**4.2. Кинетостатика на дијадата 2-3.**




Сл. 2. Кинетостатика на дијадата 2-3 Сл. 3. Кинетостатика на коленото 1

Од условот $\sum_i M_{Di}^{(2,3)} = 0$ (сл. 2) за рамнотежа на моментите околу точката D од двата членови од дијадата 2-3 непосредно следува

$$T_{12}(\varphi_1) = \frac{1}{l_{AD}} \cdot \left[M_2^{in} + M_3^{in} + M_w - F_{2x}^{in} \cdot y_{C2} - \left(F_{2y}^{in} - m_2 g\right) \cdot (l_4 - x_{C2}) - \right.$$
$$\left. -F_{3x}^{in} \cdot y_{C3} - \left(F_{3y}^{in} - m_3 g\right) \cdot (l_4 - x_{C3})\right] \tag{18}$$

каде $M_w(\varphi_1) = -\omega_3(\varphi_1) \cdot b_w$ е земен како вискозен момент на момент на отпорот врз третиот член, пропорционален на неговата аголна брзина. Сите членови во рав. (18) претставуваат функции од генерализираната координата $\varphi_1$ , добиени претходно.

Од условот за рамнотежа на силите врз членот 2, $\sum_i \vec{F}_i^{(2)} = 0$, добиваме:

$$\begin{cases} \cos\beta \cdot N_{12} - \sin\varphi_2 \cdot F_{32} = -\left(\sin\beta \cdot T_{12} + F_{2x}^{in}\right) \\ -\sin\beta \cdot N_{12} + \cos\varphi_2 \cdot F_{32} = -\left(\cos\beta \cdot T_{12} + F_{2y}^{in} - m_2 g\right) \end{cases} \tag{19}$$

Решавајќи го системот равенки (19) ги наоѓаме силите:

$$N_{12}(\varphi_1) = \frac{-1}{\cos(\beta+\varphi_2)} \cdot \left[\sin(\beta + \varphi_2) \cdot T_{12} + \cos\varphi_2 \cdot F_{2x}^{in} + \sin\varphi_2 \cdot \left(F_{2y}^{in} - m_2 g\right)\right]$$

$$F_{32}(\varphi_1) = \frac{-1}{\cos(\beta+\varphi_2)} \cdot \left[T_{12} + \sin\varphi_2 \cdot F_{2x}^{in} + \cos\varphi_2 \cdot \left(F_{2y}^{in} - m_2 g\right)\right] \tag{20}$$

Знаејќи ги компонентите на силата $F_{12}$, го наоѓаме и интензитетот $F_{12} = \sqrt{T_{12}^2 + N_{12}^2}$.

Од равенката $\sum_i M_{Ai}^{(2)} = 0$ за рамнотежа на моментите од членот 2 го определуваме внатрешниот момент во лизгачот B:

$$M_{32}(\varphi_1) = M_2^{in} + F_{32} \cdot l_{AB} - F_{2x}^{in} \cdot l_{AC2} \cdot \sin\varphi_2 + \left(F_{2y}^{in} - m_2 g\right) \cdot l_{AC2} \cdot \cos\varphi_2$$

Кинетостатиката на дијадата 2-3 завршува со определувањето на силите во парот D од условот $\sum_i \vec{F}_i^{(3)} = 0$ за рамнотежа на силите кои го напаѓаат членот 3:

$$F_{43x} = -F_{3x}^{in} - F_{32} \cdot \sin\varphi_2,\ F_{43y} = -F_{3x}^{in} - m_3 g + F_{32} \cdot \cos\varphi_2,\ F_{43} = \sqrt{F_{43x}^2 + F_{43y}^2} \tag{21}$$

### 4.3 Кинетостатика на коленото 1

Согласно рекурзивниот Њутн-Ојлеров приод, анализата ја вршиме враќајќи се наназад, пд дијадата 2-3 кон коленото 1 (сл. 3/1). Најпрво, вршиме трансформација на компонентите на силата $\overrightarrow{F_{12}}$ , $T_{12}$ и $N_{12}$, во компоненти во однос на Декартовиот систем x-y (сл. 3/2). Според законот за акција и реакција, со завртување на силата $\overrightarrow{F_{12}}$ ја наоѓаме силата $\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}}$ преку најдените компоненти $T_{12}$ и $N_{12}$:

$$F_{21x} = -T_{12}\sin\beta - N_{12}\cos\beta \ , F_{21y} = -T_{12}\cos\beta + N_{12}\sin\beta \qquad (22)$$

Од равенката $\sum_i M_{0i}^{(1)} = 0$ го наоѓаме моментот на врамнотежување, потребен за движење на механизмот со зададената брзина $\omega_1$ и забрзување $\varepsilon_1$ на коленото:

$$M_p = -M_2^{in} + \left(F_{21x}l_1 + F_{1x}^{in}l_{OC1}\right)\sin\varphi_1 - \left(F_{21y}l_1 + \left(F_{1y}^{in} - m_1 g\right)l_{OC1}\right)\cos\varphi_1 \quad (23)$$

Кинетостатичката анализа ја завршуваме со наоѓање на силата $\overrightarrow{F_{41}}$ од равенката $\sum_i \vec{F}_i^{(1)} = 0$:

$$F_{41x} = -F_{1x}^{in} - F_{21x}, F_{41y} = -F_{1x}^{in} - m_1 g + F_{21y}, F_{41} = \sqrt{F_{41x}^2 + F_{41y}^2} \qquad (24)$$

### 4.4. Инверзен проблем на динамиката - движење на механизмот под дејство на приложени сили и моменти

Инверзиот проблем на динамиката можеме да го решиме доколку се познати движечките сили и моменти во функција од положбата на коленото $\varphi_1$. Поагајќи од теоремата за промена на кинетичката енергија, ја наоѓаме аголната брзина на коленото

$$\omega_1(\varphi_1) = \sqrt{\frac{2A(\varphi_1)}{J^*(\varphi_1)} + \frac{J^*(\varphi_{1.0})}{J^*(\varphi_1)}\omega_1(\varphi_{1.0})} \ , \qquad (25)$$

каде $J^*(\varphi_1) = J_{C1} + m_1 l_{OC1}^2 + m_2(x'^2_{C2} + y'^2_{C2}) + (J_{C2} + J_{C3} + m_3 l_{DC3}^2)\varphi'^2_3 \qquad (26)$

е редуцираниот момент на инерција на механизмот кај коленото, а

$A(\varphi_1) = \int_{\varphi_{1.0}}^{\varphi_1} M^*(\theta) \cdot d\theta$ е работата од редуцираниот (кај коленото) момент $M^*(\varphi_1)$:

$$M^*(\varphi_1) = M_k - g \cdot (m_1 y'_{C1} + m_2 y'_{C2} + m_3 y'_{C3}) \qquad (27)$$

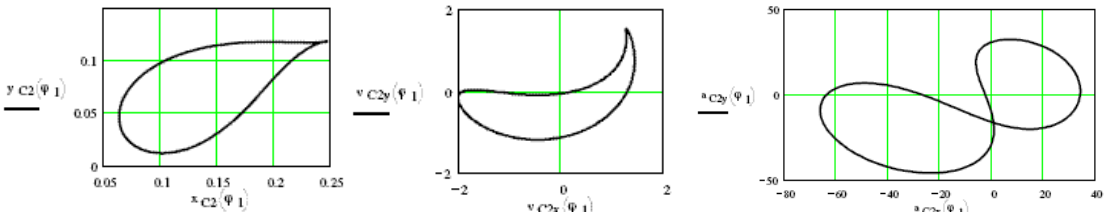
Аголното забрзување на коленото конечно се наоѓа од равенката

$$\varepsilon_1(\varphi_1) = \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{J^*(\varphi_1)} \cdot \left[M^*(\varphi_1) - \frac{1}{2}J^{*\prime}(\varphi_1) \cdot \omega_1^2(\varphi_1)\right], \qquad (28)$$

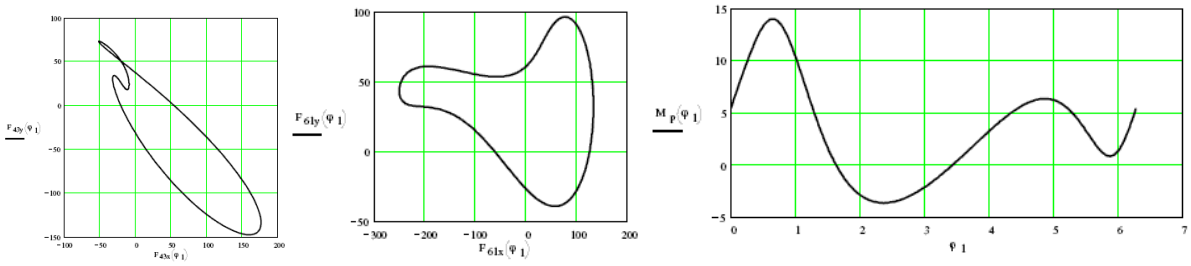
каде $J^{*\prime}(\varphi_1) = \mathrm{d}J^*/\mathrm{d}\varphi_1$ е извод на редуцираниот момент на инерција по аголот $\varphi_1$.

## 5. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕР ЗА ПРЕСМЕТКА

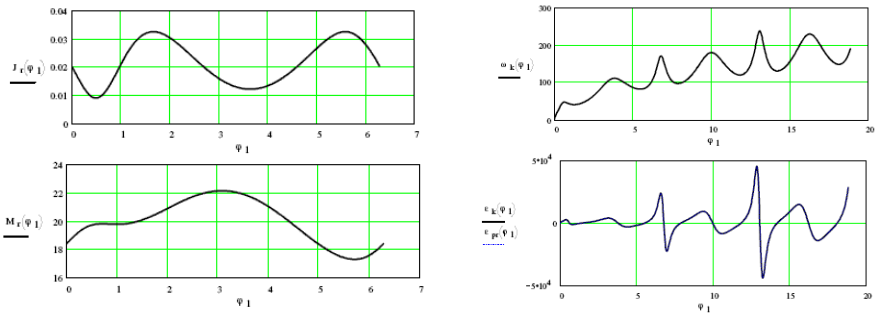
Врз основа на претходните пресметки, извршени се пресметки во Mathcad и резултатите се прикажани подолу дијаграмски. Користени се следните влезни податоци: $l_1 = 0.1$ m, $l_2 = 0.35$ m, $l_3 = 0.15$ m, $l_4 = 0.3$ m, $\alpha = \pi/3$, $l_{OC1} = l_1/2$, $l_{AC2} = l_2/2$ $l_{DC3} = l_3/2$, $\omega_1 = 20\ s^{-1}$, $\varepsilon_1 = 0$, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 3$ kg, $m_3 = 1.5$ kg. $J_{Ci} = \frac{m_i l_i^2}{12}$ ($i =$ *1,2,3, kw=2* Nm/(rads). Почетни услови за инверзната динамика: *φ1.0=0, ω1φ1.0=0,* $M_k = 20$ Nm.



Сл.4. Лостова крива на $C_2$ и одографи на неговата брзина и забрзување.



Сл. 5. Одографи на силите $F_{43}$ и $F_{61}$ и момент на врамнотежување $M_p$.



Сл. 6. Лево - редуциран момент на инерција и редуциран момент на колното. Десно - аголна брзина и аголно забрзување на колното под дејство на приложени сили.

## Заклучок

Прикажаниот начин на решавање, иако за случај на механизам со дијада РТР, може да се примени и на преостанатите 4 вида на дијади (РРР, РРТ, РТТ, ТРТ). Разлика ќе има како во позиционата, така и во кинематската и динамичката анализа, но алгоритамот на пресметката ќе ги има истите чекори. Покрај за анализа на механизми од II класа, елементи од пресметката можат да послужат и за поставувавање на алгоритмот за пресметка на механизам од III и IV класа, со таа разлика што решавањето ќе мора да биде нумеричко. Заинтересираните читатели целокупната пресметка во Mathcad можат да ја побараат од авторот или да ја превземат во PDF формат од следниот линк: http://www.tfb.edu.mk/files/rezultati/MehanizamRTR.pdf .

## Користена литература


1. C. H. Suh, C. W. Radcliffe, Kinematics and Mechanism Design, John Wiley &Sons, 1987.
2. И. И. Артоболевский, Теория механизмов и машин. „Наука“ - ФИЗМАТЛИТ, Москва 1988.
3. M. Čavić, M. Kostić, M. Zlokolica, Position analysis of the High Class Kinematic Group Mechanisms, 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June18-21, 2007.

**Abstract**

In this paper an analytical approach for analyzing positions, velocities, accelerations, forces and torques in all links and joints of a four link mechanism of second class, containing a kinematic group (dyad) of type RPR (rotational-prismatic-rotational) is described. The mechanisms of this type, due to complexity of calculations, have been traditionally solved graphically. The proposed analytical method is more accurate and faster than traditional methods and a complete algorithm is described and the results of computations are presented. The method, besides the theoretical and didactical role, can be used for designing mechanisms of this class.

*Keywords:* analytical solution, dyad RPR, kinematic and dynamic analysis.