Предавање 4

4. ОСНОВНИ РАСПРЕДЕЛБИ НА ВЕРОЈАТНОСТ НА ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

4.1 Биномна распределба

Да претпоставиме дека се реализираат **n** - независни експерименти, и дека при секој од нив веројатноста да се реализира настанот А е еднаква на **p**. Тогаш, случајната променлива Х може да има вредности 0, 1, 2, 3, ... , n. Се поставува прашањето колкави се веројатностите да се случи секој од овие можни исходи?

Во општ случај, можеме да напишеме која е веројатноста случајната променлива да земе вредност **X = x** при **n** повторувања на експериментот. Во овој случај имаме

x - пати се реализирал настанот А и **n - x** пати не се реализирал настанот А

Ако веројатноста да се реализира настанот е иста и еднаква на **p**, и ако веројатноста да не се реализира настанот е еднаква на q = 1 - p, тогаш веројатноста за еден можен исход од n - експерименти би бил

$$p^x(1-p)^{n-x} = p^x q^{n-x}$$

Но, како што знаеме има вкупно

$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ комбинации на кои можат да се изберат **x** успешни реализации и **n - x** неуспешни реализации па според тоа, веројатноста дека случајно променливата Х ќе добие вредност х ќе биде:

$$p(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Овој закон на распределба на веројатности се вика **биномна распределба**.

Математичкото очекување на биномната распределба е

$$M(X) = np$$

а дисперзијата е

$$D(X) = np(1-p) = npq$$

Пример. Тај-саш е ретка болест со генетско потекло. Ако двајцата родители се носители на овој ген, веројатноста дека нивното дете ќе ја има оваа болест е еднаква на

а) 0,25

б) 0,5

в) 0,75

Ако тие имаат 4 деца да се најдат веројатностите 0,1,2,3 или 4 деца да ја имаат оваа болест. Да се нацртаат графици на распределбите за сите три случаи.

а) p = 0,25 n = 4

$$p(X=x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$p(X=0)=\frac{4!}{0!(4-0)!}0{,}25^0(1-0{,}25)^{4-0}=0{,}75^4=0{,}3164$$

$$p(X=1)=\frac{4!}{1!(4-1)!}0{,}25^1(1-0{,}25)^{4-1}=4\cdot 0{,}25^1 0{,}75^3=0{,}4218$$

итн.

n = 4
p = 0,25

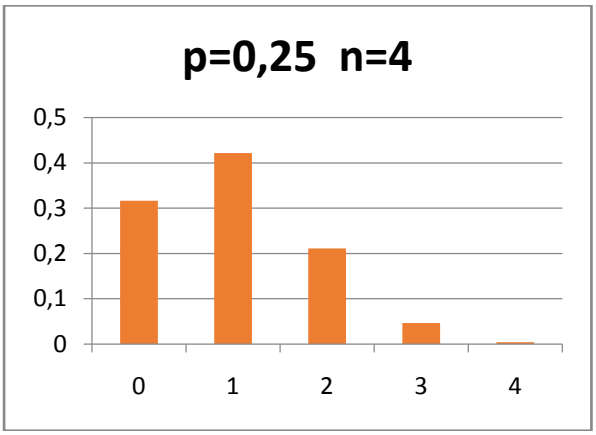
x	p(X=x)
0	0,316406
1	0,421875
2	0,210938
3	0,046875
4	0,003906
suma	1

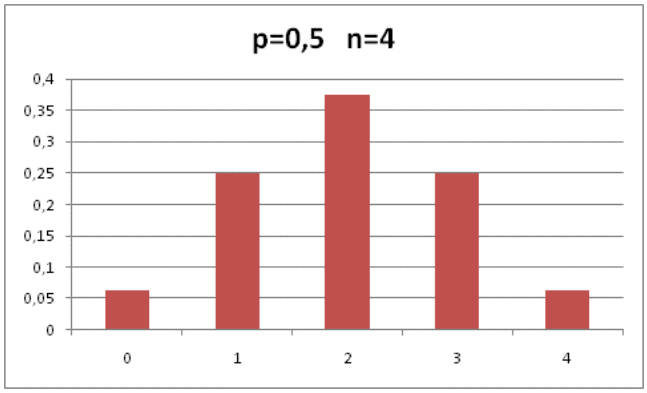
n = 4
p = 0,5

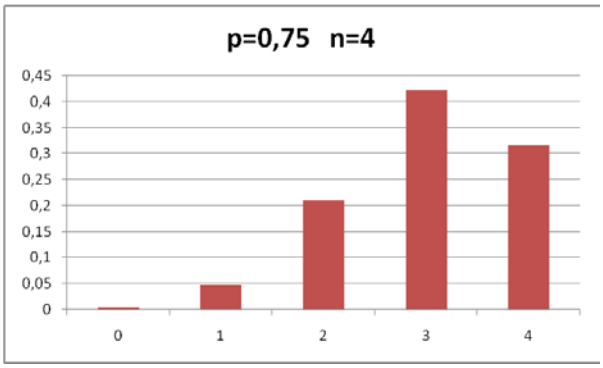
x	p(X=x)
0	0,0625
1	0,25
2	0,375
3	0,25
4	0,0625
suma	1

n = 4
p = 0,75

x	p(X=x)
0	0,003906
1	0,046875
2	0,210938
3	0,421875
4	0,316406
suma	1







Пример При вршење на технички преглед на моторни возила забележано е дека 6% од возилата се неисправни. Ако случајно се изберат пет возила кои дошле на технички преглед колкава е веројатноста дека три од нив ќе бидат неисправни.

Решение: Возилата можат да бидат исправни или неисправни. Бидејќи 6% се неисправни тоа значи дека веројатноста дека возилото ќе биде неисправно е p = 0,06.

$$p(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$p(X = 3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} 0{,}06^3 (1-0{,}06)^{5-3} = 0{,}001909$$

4.2 Геометриска и негативна биномна распределба

Нека веројатноста да се реализира настанот А е иста и еднаква на $p(A) = p$ односно веројатноста дека нема да се реализира е $p(\overline{A}) = 1 - p = q$. Со биномната распределба се определува веројатноста настанот А да се реализира 0, 1, 2, ... пати. Но ако дефинираме случајна променлива која означува број на повторување на експериментот до првата реализација на настанот А, тогаш оваа случајно променлива може да зема вредности 1, 2, 3 ... Веројатноста случајната променлива (број обиди до прва реализација) ќе биде:

$$p(X = x) = q^{x-1} \cdot p \qquad \text{за } x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Ова значи дека претходно имало x-1 неуспешни обиди и x-от (последниот) обид е успешен.

Оваа распределба се вика **геометриска распределба**, а името произлегува од фактот дека збирот на веројатностите кај оваа распределба прави геометриска прогресија.
Математичкото очекување на геометриската распределба е

$$M(X) = \frac{1}{p}$$

а дисперзијата е

$$D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Геометриската распределба може да се воопшти на следниот начин: Нека експериментот се повторува додека настанот А не се реализира к пати. Овде случајно променливата Х е бројот на повторување на експериментот се додека се постигнат к реализации. Со други зборови, к-та реализација ќе се појави при х-то повторување на екпериментот. Ова може да се толкува и како појава на к-1 реализации при х-1 повторувања на експериментот и да во х-тото повторување, настанот А да се појави уште еднаш. Бидејќи овие настани се независни, се добива:

$$p(X = x) = \frac{(x-1)!}{(k-1)!\cdot(x-k)!} \cdot p^k \cdot q^{x-k} \qquad за\ x = k, k+1, ...$$

Посебно за к=1 се добива геометриската распределба.

Оваа распределба е позната под името **Паскалова распределба**.

Во некои случаи е подобро да се воведе нова случајна променлива $Y = X - k$ која го означува дополнителниот број на повторување на експериментот над к - потребните пати, за да настанот А се реализира к - пати. Може исто така да се толкува дека Y е број на неуспеси до к-тиот успех.

Ако во равенката за паскалова распределба се замени $x = y + k$, законот за распределба ќе биде:

$$p(Y = y) = \binom{y+k-1}{k-1} \cdot p^k \cdot q^y = \frac{(y+k\text{-}1)!}{(k\text{-}1)!\ \ y!}\ \ p^k \cdot q^y \qquad \mathrm{y} = 0,1,2,3.....$$

и оваа распределба се вика **негативна биномна распределба** .

Математичкото очекување на негативната биномна распределба е

$$M(X) = k \cdot \frac{q}{p}$$

а дисперзијата е

$$D(X) = k \cdot \frac{q}{p^2}$$

4.3 Пуасонова распределба

Пуасоновата распределба има голема примена во сообраќајното инженерство.

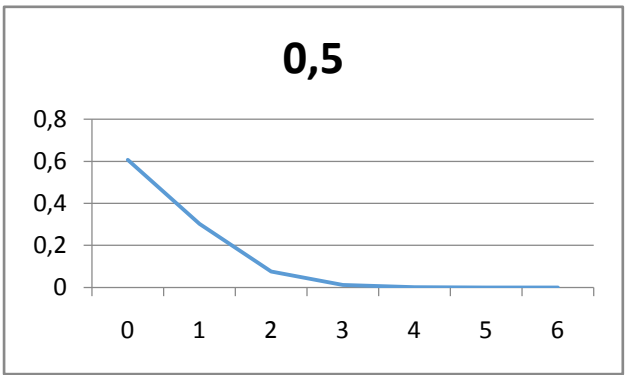
Пуасоновата распределба е дефинирана со следниот закон на распределба на веројатностите:

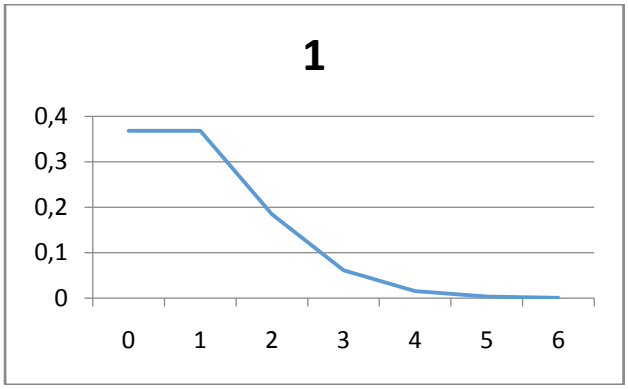
$$p(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0,1,2,3.....$$

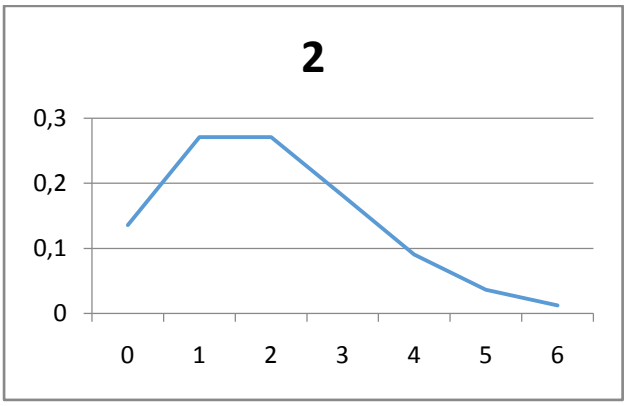
Може да се докаже дека кога $n \to \infty \quad p \to 0$ биномната распределба тежи кон Пуасонова распределба на веројатноста. Ова се користи при решавање на веројатности на биномна распределба, со тоа што истите се апроксимираат со пуасонова кога $n \to \infty \quad p \to 0$.

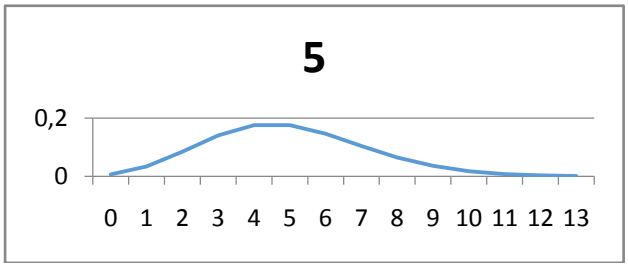
Математичкото очекување на пуасоновата распределба е $M(X) = \lambda$
а дисперзијата е $D(X) = \lambda$

Како изгледа пуасоновата дистрибуција за различни вредности на λ ?









Се гледа дека колку е λ поголемо, толку распределбата станува посиметрична.

Пример: Телефонските повици во станот на Перо го следат пуасоновиот процес со 2 повици на час.

а) Ако Перо излезе на 10 минути да купи леб, која е веројатноста на повици во тие десет минути?

б) Колку време може да се задржи Перо ако тој сака веројатноста да нема телефонски повик да е најмалку 0,5?

Решение:

а) Кога имаме појави во одредени временски интервали, средната вредност на пуасоновата распределба може да се напише како

$$p(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{\left(\frac{N \cdot t}{T}\right)^x \cdot e^{-\frac{N \cdot t}{T}}}{x!} \qquad x = 0,1,2,3.....$$

каде средната вредност $\lambda = \frac{N \cdot t}{T}$ е просечен број на појави во единица време во дадено време

Тогаш веројатноста дека во 10 минути нема да има ниеден повик е спротивен настан на тоа дека ќе има барем еден повик во тие 10 минути ако во 60 минути просечно има 2 повици.

$$1-p(X=0)=1-\frac{\left(\frac{2\cdot 10}{60}\right)^0\cdot e^{-\frac{2\cdot 10}{60}}}{0!}=1-e^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{e}}=0{,}283$$

б) $p(X=0)\geq 0{,}5$

$$\frac{\left(\frac{2\cdot t}{60}\right)^0\cdot e^{-\frac{2\cdot t}{60}}}{0!}\geq 0{,}5$$

$e^{-\frac{2\cdot t}{60}}\geq 0{,}5$ ги логаритмираме двете страни

$$-\frac{2t}{60}\geq \ln(0{,}5)$$

$t\leq -\ln(0{,}5)\cdot\frac{60}{2}=20{,}8$ мин

Примена на Пуасонова распределба во сообраќајот

Пуасоновата распределба има голема примена во сообраќајното инженерство. Од закон на распределба на возила на сообраќајница, до анализа на паркинг места или сообраќајни незгоди, пуасоновата распределба се појавува како закон на распределба на веројатности кои може добро да ги опише овие појави.

Пример: На пресек на улица се брои бројот на возилата кои поминуваат во 30 секунди. Тој број е даден во табелата подолу.

Измерени вредности				Пуасонова распределба		
X Број на возила во 30 сек	Измерени фрекфенции f_i	$x*f_i$		X	Веројатности според Пуасон	Теоретски фрекфенции f_t
0	6	0		0	0,062662	6,3
1	18	18		1	0,173574	17,4
2	21	42		2	0,2404	24,0
3	26	78		3	0,221969	22,2
4	16	64		4	0,153714	15,4
5	8	40		5	0,085157	8,5
6	2	12		6	0,039314	3,9
7	1	7		7	0,015557	1,6
8	2	16		8	0,005387	0,5
9	0	0		9	0,001658	0,2
suma	N=100	277				

$$\lambda \approx x_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{N} = \frac{277}{100} = 2{,}77$$

$$p(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$p(X = 0) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{2{,}77^0 \cdot e^{-2{,}77}}{0!} = 0{,}062662$$

$$p(X = 1) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{2{,}77^1 \cdot e^{-2{,}77}}{1!} = 0{,}173574$$

итн.

Пресметаните вредности за веројатностите според Пуасоновата распределба се дадени во погорната табела во претпоследната колона.

Теоретските фрекфенции се пресметани според формулата

$$f_{t,i} = N \cdot p(X = x)$$

На пример за X = 0

$$f_{t,i} = N \cdot p(X = 0) = 100 \cdot 0{,}062662 = 6{,}26$$

за X = 1

$$f_{t,i} = N \cdot p(X = 1) = 100 \cdot 0{,}17357 = 17{,}35$$

итн.

Пример: На паркинг простор кој има 48 места, на случаен начин се избираат 5 минутни интервали кога се бројат празните места.

Измерени вредности				Пуасонова распределба		
X Број на празни паркинг места	f_i	$x*f_i$		$\lambda = 1{,}566$		f teoretsko
0	29	0		0	0,20874	25,0
1	42	42		1	0,327026	39,2
2	21	42		2	0,25617	30,7
3	16	48		3	0,133778	16,1
4	7	28		4	0,052396	6,3
5	2	10		5	0,016417	2,0
6	3	18		6	0,004287	0,5
7	0	0		7	0,000959	0,1
suma	120	188				120,0

$$\lambda \approx x_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{N} = \frac{188}{120} = 1{,}566$$

Пример: На пат е избројан сообраќај од 800 возила/час. Колкава е веројатноста во 30 секунди да се појават 5 возила, ако се работи за пуасонова распределба на возилата на патот.

$$p(X=5)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=\frac{\left(\frac{N\cdot t}{T}\right)^x\cdot e^{-\frac{N\cdot t}{T}}}{x!}=\frac{\left(\frac{800\cdot 30}{3600}\right)^5}{5!}\ e^{-\left(\frac{800\cdot 30}{3600}\right)}=0{,}00056$$

Пример. Во еден град е анализиран бројот на сообраќајни незгоди во текот на 200 дена. Податоците за сообраќајните незгоди се дадени во табелата:

Број на сооб. незгоди дневно	0	1	2	3	4	5	6
Број на денови	130	51	12	4	2	1	0

Да се пресмета средниот број на незгоди дневно (аритметичка средина) а потоа ако се претпостави пуасонова распределба со овој среден број на незгоди, да се најде веројатноста дека во еден ден ќе се случат три или повеќе незгоди.

Решение:

$$\lambda=\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{7}x_i\cdot f_i}{N}=\frac{0\cdot 130+1\cdot 51+2\cdot 12+3\cdot 4+4\cdot 2+5\cdot 1+6\cdot 0}{200}=\frac{100}{200}=0{,}5$$ незгоди просечно дневно

$$p(X\geq 3)=1-p(X\leq 2)=1-\sum_{x=0}^{2}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=1-\left(\frac{1}{e^{0,5}}+\frac{0{,}5^1}{e^{0,5}}+\frac{0{,}5^2}{2\cdot e^{0,5}}\right)=0{,}0144$$

Пример: На патниот правец Охрид - Кичево на петиот километар од Охрид во насока кон Охрид е броен сообраќајот во времето од 9,49 до 10.46 часот. Условите на одвивање се нормални. Патот е прегледен, дозволува преминување по значителна должина, па може да се каже дека нема нарушување на токот на возила. Снимањето е извршено на пресек на патот, при што се забележани времињата на поминување на возилата покрај дадена точка. Резултатите од снимањето се дадени во табела.

Број на возила во 10 секунди	измерени фрекфенции	Пуасонова распределба	Пуасон
xi	fi	fti	pi
0	128	126,18	0,3679
1	120	126,18	0,3679
2	69	63,09	0,1839
3	25	21,03	0,0613
4	0	5,26	0,0153
5	1	1,05	0,0031
Suma	343		

$$p(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{\left(\frac{N \cdot t}{T}\right)^x \cdot e^{-\frac{N \cdot t}{T}}}{x!}$$

N = 343 возила
T = 3430 s
t = 10 s
Теоретските фрекфенции се добиени според формулата

$$f_{ti} = N \cdot p(X = x) = 343 \cdot \frac{\left(\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right)^x \cdot e^{-\frac{N \cdot t}{T}}}{x!}$$

Пример: При услови на појава на прекини на сообраќајните токови (семафори во градски услови) доаѓа до голема промена на вредностите на протоците на возилата поради што се појавува голема дисперзија. Таква распределба која има голема дисперзија е негативната биномна распределба. Проверка на ова е направена со снимање на возила на раскрсницата помеѓу улиците Партизанска и Иво Лола Рибар, а снимани се возилата кои излегуваат од раскрсницата на улица Партизанска. Времето на снимање е од 14.27 до 15.13 часот, односно 2760 секунди.

Броени се возила во интервали од 10 секунди.

Број на возила	измерени	
во 10 секунди	фрекфенции	
xi	fi	fiti
0	144	0
1	84	84
2	33	66
3	12	36
4	2	8
5	1	5
6	0	0
suma	276	199

При пресметката на негативна биномна распределба земено е дека максималниот број на возила кој поминува во 10 с да е 6 возила т.е.

$$y + k = 6$$

За негативната биномна распределба е карактеристично тоа што во формулата

$$p(Y = y) = \binom{y + k - 1}{k - 1} \cdot p^k \cdot q^y \qquad y = 0,1,2,3.....$$

веројатностите p и $q = 1 - p$ се менуваат за различни вредности на к.

Бидејќи знаеме дека

$$M(Y) = k \cdot \frac{q}{p} = k \cdot \frac{1-p}{p} \approx \bar{y}$$

па оттука

$$p \approx \frac{k}{k + \bar{y}}$$

Средната вредност се пресметува на следниот начин

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot f_i}{N} = \frac{199}{276} = 0{,}721$$

Веројатност дека во 10 секунди ќе поминат 0 возила според негативната биномна распределба ќе биде:

$$y + k = 6$$
$$y = 0, \qquad k = 6$$
$$p \approx \frac{k}{k + \bar{y}} = \frac{6}{6 + 0{,}721} = 0{,}8927$$

Веројатност дека во 10 секунди ќе помине 1 возило според негативната биномна распределба ќе биде:

$$y + k = 6$$
$$y = 1, \qquad k = 5$$
$$p \approx \frac{k}{k + \bar{y}} = \frac{5}{5 + 0{,}721} = 0{,}8740$$

Веројатност дека во 10 секунди ќе поминат 2 возила според негативната биномна распределба ќе биде:

$$y + k = 6$$
$$y = 2, \qquad k = 4$$
$$p \approx \frac{k}{k + \bar{y}} = \frac{4}{4 + 0{,}721} = 0{,}8473$$

итн.

Теоретските фрекфенции се добиени според формулата

$$f_{ti} = N \cdot p(Y = y) = N \cdot \binom{y + k - 1}{k - 1} \cdot p^k \cdot q^y$$

N = 276 возила

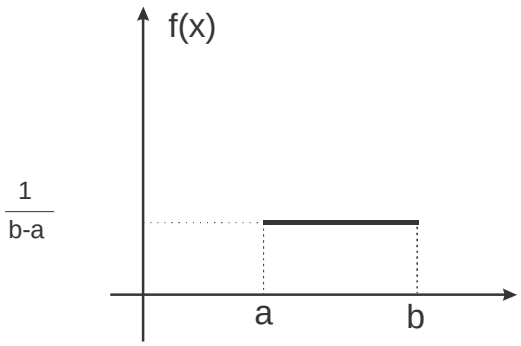
		y_{sr} =	0,721014493			
Број на возила	измерени				Негативна	
во 10 секунди	фрекфенции				биномна	
y_i	f_i	$f_i t_i$	k	p_i	p(Y=y)	f_{ti}
0	144	0	6	0,8927	0,506172	139,70
1	84	84	5	0,8740	0,321311	88,68
2	33	66	4	0,8473	0,120203	33,18
3	12	36	3	0,8062	0,038127	10,52
4	2	8	2	0,7350	0,013317	3,68
5	1	5	1	0,5811	0,007499	2,07
6	0	0	0	0,0000	#NUM!	#NUM!
	276	199				

5. ОСНОВНИ РАСПРЕДЕЛБИ НА НЕПЕРИКИНАТИ СЛУЧАЈНО ПРОМЕНЛИВИ

5.1 Равномерна распределба

Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот (а, в) ако е дефинирана со функцијата на густина од облик

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a < x < b$$



Во согласност со својствата на функцината на густина

$$\int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1$$

Математичкото очекување е

$$M(X)=\int_a^b \frac{1}{b-a}xdx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{2\cdot(b-a)}\left(b^2-a^2\right)=\frac{1}{2(b-a)}(b+a)(b-a)=\frac{b+a}{2}$$

Дисперзијата е

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

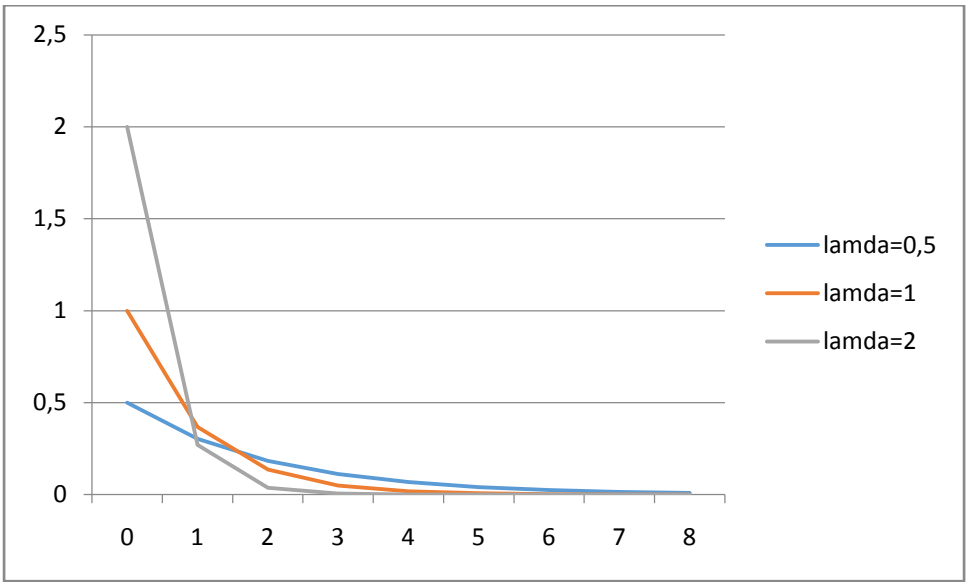
5.2 Експоненцијална распределба

Непрекината случајно променлива X има експонензијална распределба со параметар λ ако нејзината густина на веројатности е

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad 0\le x\le\propto$$

Може да се провери дека важи

$$\int_0^{\propto}\lambda e^{-\lambda x}dx=1$$



Математичкото очекување е

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}$$

а дисперзијата е

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

Функцијата на распределба е

$$F(X) = p(X < x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

Веројатноста пак X > x е еднаква на

$$p(X > x) = 1 - p(X < x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

Додека пак

$$p(x_1 < X < x_2) = (1 - e^{-\lambda x_2}) - (1 - e^{-\lambda x_1}) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}$$

Експоненцијалната распределба се употребува за моделирање за време помеѓу два настани или време на чекање.

Доколу одредена појава има пуасонов закон на распределба на број на одредени појави во дадено време, тогаш временските растојанија помеѓу тие појавувања ќе имаат експоненцијална распределба.

Ако на пример распределбата на возила на даден пресек на патот има пуасонова распределба

$$p(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{\left(\frac{N \cdot t}{T}\right)^x \cdot e^{-\frac{N \cdot t}{T}}}{x!}$$

колкава е веројатноста дека нема да се појави ниедно возило?

$$p(X = 0) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{\left(\frac{N \cdot t}{T}\right)^x \cdot e^{-\frac{N \cdot t}{T}}}{x!} = e^{-\frac{N \cdot t}{T}}$$

Ова е всушност исто со веројатност дека временскиот интервал помеѓу две возила ќе биде поголем од t тоа е всушност експоненцијална распределба.

Пример: X е експоненцијална случајна променлива и $p(X < 1) = 0{,}5$. Да се определи λ.

$$F(X) = p(X < x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$p(X < 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^1 = 1 - e^{-\lambda} = 0{,}5$$

$$e^{-\lambda} = 0{,}5$$

$$\lambda = -\ln(0{,}5) = 0{,}69$$

Пример: Животниот век на пумпа за висок притисок кај дизел возило има експоненцијална распределба со $\lambda = 0{,}1$.

а) да се најде веројатноста дека животниот век е помалку од 10 години

б) да се најде веројатноста дека ѓивотниот век е меѓу 5 и 15 години

в) Најди за колку време t ќе имаме ситуација да веројатноста за животен век на пумпата е подолг од t.

Решение:

a)

$$F(X) = p(X < x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(10) = p(X < 10) = 1 - e^{-0{,}1\cdot 10} = 1 - \frac{1}{e} = 0{,}632$$

b)

$$p(x_1 < X < x_2) = (1 - e^{-\lambda x_2}) - (1 - e^{-\lambda x_1}) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}$$

$$p(5 < X < 15) = e^{-0{,}1\cdot 5} - e^{-0{,}1\cdot 15} = 0{,}383$$

c)

$$p(X > t) = 1 - p(X < t) = e^{-0{,}1t}$$

Пример: Нека брзината на движење на пешак кој преминува преку улица широка d метри изнесува v метри во секунда. Да се одреди колку најмногу возила можат да поминат по улицата така да пешакот безбедно може да ја премине улицата најмалку еднаш во една минута.

Решение:

Времето за преминување на улицата од страна на пешакот е

$$t = \frac{d}{v}$$

Нека со N се бележи бројот на возила кои поминува по улицата за време од 1 час (3600 секунди)

Тогаш, ако токот на возила има пуасонова распределба, распределбата на временските растојанија помеѓу возилата има експоненцијална распределба.

За пешакот да има доволно време за преминување, временскиот интервал помеѓу возилата мора да биде поголем од t, односно веројатноста да се случи тоа ќе биде

$$p(X > t) = e^{-\frac{N\cdot t}{3600}}$$

Бројот на интервали t во 3600 секунди ќе биде $\frac{3600}{t}$ а очекуваниот број на такви интервали ќе биде еднаков на бројот на такви интервали по веројатноста да се појави таков интервал

$$\frac{3600}{t}\cdot e^{-\frac{Nt}{3600}}$$

Според условот на задачата потребно е да се определи бројот на возила кој дозволува да се појават 60 такви интервали (еднаш во една минута)

$$\frac{3600}{t}\cdot e^{-\frac{Nt}{3600}} = 60$$

$$e^{-\frac{Nt}{3600}} = \frac{60t}{3600} = \frac{t}{60} = \frac{d}{60v}$$

$$-\frac{Nt}{3600} = \ln\frac{d}{60v}$$

$$N = -\frac{3600v}{d}\ln\frac{d}{60v}$$

На пример, ако v = 1,1 m/s (4 km/h) и d = 6 m, пешакот ќе може барем еднаш да ја премине улицата во 1 минута, ако бројот на возила е помал од

$$N = -\frac{3600v}{d}\ln\frac{d}{60v} = -\frac{3600\cdot 1{,}1}{6}\ln\frac{6}{60\cdot 1{,}1} = 1583\,vozila/h$$

Ако v = 1 m/s (4 km/h) и d = 10 m, пешакот ќе може барем еднаш да ја премине улицата во 1 минута, ако бројот на возила е помал од

$$N = -\frac{3600v}{d}\ln\frac{d}{60v} = -\frac{3600\cdot 1}{10}\ln\frac{10}{60\cdot 1} = 645\,vozila/h$$

Пример: (Распределба на интервали на следење на патен правец Кичево - Охрид) Обработени се резултатите од снимање на сообраќајот на овој правец. Податоците од снимањето се средени во подолната табела, каде е даден бројот на интервали во дадени класи на траење со ширина од 4 секунди.

Теоретските фрекфенции според експоненцијалната распределба ќе ги определиме со пресметката на веројатноста интервалот на следење да падне во поедина класа помножено со вкупниот број на изброени интервали на следење

$$f_{ti} = N\cdot p(x_1 < X < x_2) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}$$

Параметарот λ во овој случај преставува број на возила во единица време

$$\lambda = \frac{N}{T} = \frac{216}{3345} = 0{,}0645$$

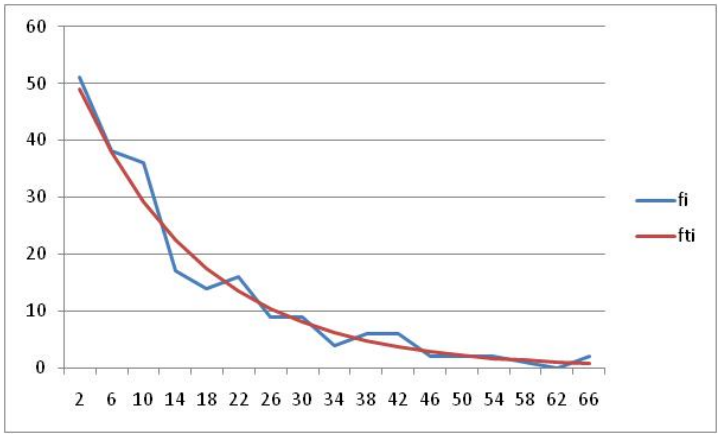
каде

N = 216 возила (избројани возила)

T = 3345 s (време на броење)

Класи на времиња		Измерени фрекфенции	Експоненцијална распределба	
x_1	x_2	f_i	$P(x_1<X<x_2)$	f_{ti}
0	4	51	0,227633	48,94
4	8	38	0,175816	37,80
8	12	36	0,135795	29,20
12	16	17	0,104883	22,55
16	20	14	0,081008	17,42
20	24	16	0,062568	13,45
24	28	9	0,048326	10,39
28	32	9	0,037325	8,02
32	36	4	0,028829	6,20
36	40	6	0,022266	4,79
40	44	6	0,017198	3,70
44	48	2	0,013283	2,86
48	52	2	0,010259	2,21
52	56	2	0,007924	1,70
56	60	1	0,00612	1,32
60	64	0	0,004727	1,02
64	68	2	0,003651	0,78
		215		

ламбда = 0,064574
N = 215
T = 3345



5.3 Нормална распределба

Нормалната распределба ја дефинирал германскиот математичар Карл Фридрих Гаус кој работел на обработка на резултати од мерења и посебно со оценка на случајни грешки, па затоа оваа распределба уште се вика и гаусова распределба.

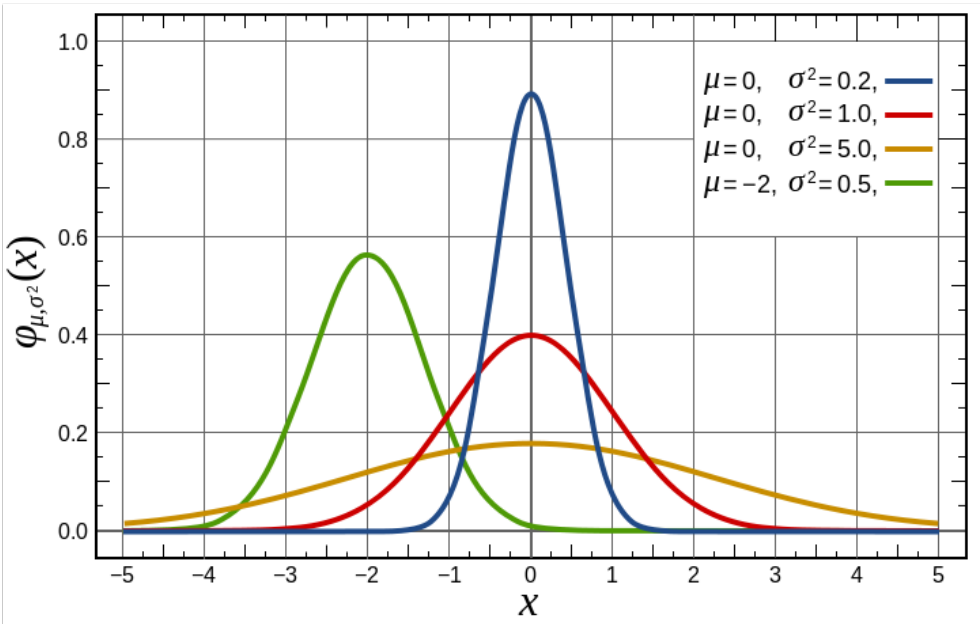
Во теоријата на веројатност и статистиката, нормалната распределба илма огромно значење бидејќи:

- многу случајни променливи, особено оние поврзани со експерименти и опсервации имаат нормална распределба
- голем број на случајно променливи имаат нормална распределба апроксимативно
- дури и ако случајно променливата нема нормална распределба ниту апроксимативно, со -
- едноставни трансформации може да се сведе на нормална распределба
- одреден број на комлицирани случајно променливи можат да се апроксимираат со нормална распределба
- случајно променливи кои служат за верификација на статистички тестови имаат нормална распределба

Непрекината случајно променлива X има нормална распределба со параметри μ и σ ако нејзината густина на распределба е

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

Кај нормалната распределба математичкото очекување, модата и медијаната имаат иста вредност еднаква на μ. Распределбата е симетрична со симетрала еднаква на математичкото очекување. Таа има форма на sвоно, колку е σ е поголемо, толку е помала максималната вредност на кривата.



Параметрите на нормалната распределба се:

$$M(X) = \mu$$
$$D(X) = \sigma^2$$

Веројатноста случано променливата X да земе вредности во интервалот (a,b) е

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Многу често при практчно решавање на проблеми се користи т.н. стандардизирана нормална распределба која има параметри

$$M(X) = 0$$
$$D(X) = 1$$

Стандардизацијата се прави со воведување на нова стандардна променлива T каде

$$T = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Тогаш

$$p(a < X < b) = p\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\sigma}{\sigma}\right) = p(t_1 < T < t_2)$$

$$dt = \frac{1}{\sigma}dx \qquad dx = \sigma dt$$

$$p(a < X < b) = p\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\sigma}{\sigma}\right) = p(t_1 < T < t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Како што е познато неопределениот интеграл $\int e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ нема примитивна функција, па неговите вредности се определени нумерички и дадени во статистички табели за различни вредности на t. Во табелите обично се дадени вредностите на функцијата

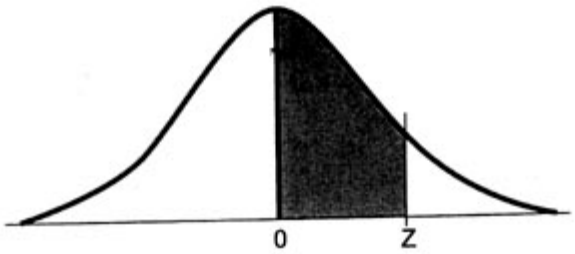
$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

(забележи дека интегралот се однесува за границите од 0 до t)

Овој интеграл се вика Лапласова функција. Тој ги има следните својства:

1. $\Phi(0) = 0$ бидејќи границите се поклопуваат
2. $\Phi(\propto) = 0{,}5$ т.е интегралот ја дава само едната половина
3. $\Phi(-t) = -\Phi(t)$ односно функцијата е непарна
4. Ако $F(X) = p(-\propto < x < x)$ е функцијата на распределба на нормална случајно променлива тогаш таа може да се пресмета со помош на лапласовата фунција на следниот начин

$$F(X) = 0{,}5 + \Phi(x)$$



This table presents the area between the mean and the Z score . When Z=1.96, the shaded area is 0.4750.

Areas Under the Standard Normal Curve

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000									

Source: Adapted by permission from *Statistical Methods* by George W. Snedecor and William G. Cochran, sixth edition © 1967 by The Iowa State University Press, Ames, Iowa, p. 548.

Пример: Случајната променлива има стандардна нормална распределба. Да се определат:

а)

$$p(0 < X < 1{,}42)$$

б)

$$p(-0{,}73 < X < 0)$$

в)

$$p(-1{,}37 < X < 2.01)$$

г)

$$p(0{,}65 < X < 1{,}26)$$

д)

$$p(-1{,}79 < X < -0{,}54)$$

ѓ)

$$p(X > 1{,}13)$$

ж)

$$p(|X| < 0{,}5)$$

з)

$$p(X < t) = 0{,}7967$$

t ако

Решавање:

а)

$$p(0 < X < 1{,}42)$$

$$p(0 < X < 1{,}42) = \Phi(1{,}42) = 0{,}4222$$ од табела

б)

$$p(-0{,}73 < X < 0)$$

$$p(-0{,}73 < X < 0) = p(0 < X < 0{,}73) = \Phi(0{,}73) = 0{,}2673$$

в)

$$p(-1{,}37 < X < 2.01)$$

$$p(-1{,}37 < X < 2.01) = \Phi(1{,}37) + \Phi(2{,}01) = 0{,}4147 + 0{,}4778 = 0{,}8925$$

г)

$$p(0{,}65 < X < 1{,}26)$$

$$p(0{,}65 < X < 1{,}26) = \Phi(1{,}26) - \Phi(0{,}65) = 0{,}3962 - 0{,}2422 = 0{,}154$$

д)

$$p(-1{,}79 < X < -0{,}54)$$

$$p(-1{,}79 < X < -0{,}54) = \Phi(1{,}79) - \Phi(0{,}54) = 0{,}4633 - 0{,}2054 = 0{,}2579$$

ѓ)

$$p(X > 1{,}13)$$

$$p(X > 1{,}13) = 0{,}5 - p(X < 1{,}13) = 0{,}5 - \Phi(1{,}13) = 0{,}5 - 0{,}3708 = 0{,}1292$$

ж)

$$p(|X| < 0{,}5)$$

$$p(|X| < 0{,}5) = p(-0{,}5 < X < 0{,}5) = 2 \cdot \Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}3830$$

з)

t =? ако

$$p(X < t) = 0{,}7967$$

t = 0,83

За нормалната распределба е интересно да се знае дека

$$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}68$$

$$p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}955$$

$$p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$$

односно

$$p(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma) = 0{,}95$$

$$p(\mu - 2{,}58\sigma < X < \mu + 2{,}58\sigma) = 0{,}99$$

Пример:

Случајната променлива има нормална распределба N(8,4). Да се определат:

a)

$$p(5 < X < 10)$$

b)

$$p(10 < X < 15)$$

c)

$$p(X > 15)$$

d)

$$p(X < 5)$$

Решение:

a)

$$p(5 < X < 10)$$

Нормалната распределба прво треба да се стандардизира во облик N(0,1).

$$p(5 < X < 10) = p(\frac{5-8}{4} < T < \frac{10-8}{4}) = p(-0{,}75 < T < 0{,}5) = \Phi(0{,}75) + \Phi(0{,}5) = 0{,}2734 + 0{,}1915 = 0{,}4649$$

b)

$$p(10 < X < 15)$$

$$p(10 < X < 15) = p\left(\frac{10-8}{4} < T < \frac{15-8}{4}\right) = p(0{,}5 < T < 1{,}75) = \Phi(1{,}75) - \Phi(0{,}5) = 0{,}4599 - 0{,}1915 = 0{,}2684$$

c)

$$p(X > 15)$$

$$p(X > 15) = p\left(T > \frac{15-8}{4}\right) = p(T > 1{,}75) = 0{,}5 - p(T < 1{,}75) = 0{,}5 - \Phi(1{,}75) = 0{,}5 - 0{,}4599 = 0{,}0401$$

d)

$$p(X < 5)$$

$$p(X < 5) = p\left(T < \frac{5-8}{4}\right) = p(T < -0{,}75) = 0{,}5 - \Phi(0{,}75) = 0{,}5 - 0{,}2734 = 0{,}2266$$

Пример: Да претпоставиме дека тежината на 800 студенти имаат нормална распределба со средна вредност 66 кг и стандардно отстапување од 5 кг. Да се најде бројот на студентите кои

а) имаат тежина помеѓу 65 и 75 кг

б) имаат тежина поголема од 72 кг

Решавање:

$$p(65 < X < 75) = p\left(\frac{65-66}{5} < T < \frac{75-66}{5}\right) = p(-0{,}2 < T < 1{,}8) = \Phi(0{,}2) - \Phi(1{,}8) = 0{,}0793 + 0{,}4641 = 0{,}5434$$

$$N = 800 \cdot 0{,}5434 = 435$$

студенти

$$p(X > 72) = p\left(T > \frac{72-66}{5}\right) = p(T > 1{,}2) = 0{,}5 - \Phi(1{,}2) = 0{,}5 - 0{,}3849 = 0{,}1151$$

$$N = 800 \cdot 0{,}1151 = 92$$

студенти

Пример: На патот Охрид - Св. Наум вршено е снимање на брзините на возилата со радар. За време на снимањето регистрирани брзините на 959 возила. Податоците за брзините се групирани во класи од по 3 км/час.

Решавање:

Проценка на средна вредност

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{N} = \frac{50340}{959} = 52{,}492$$

Проценка на стандардно отстапување

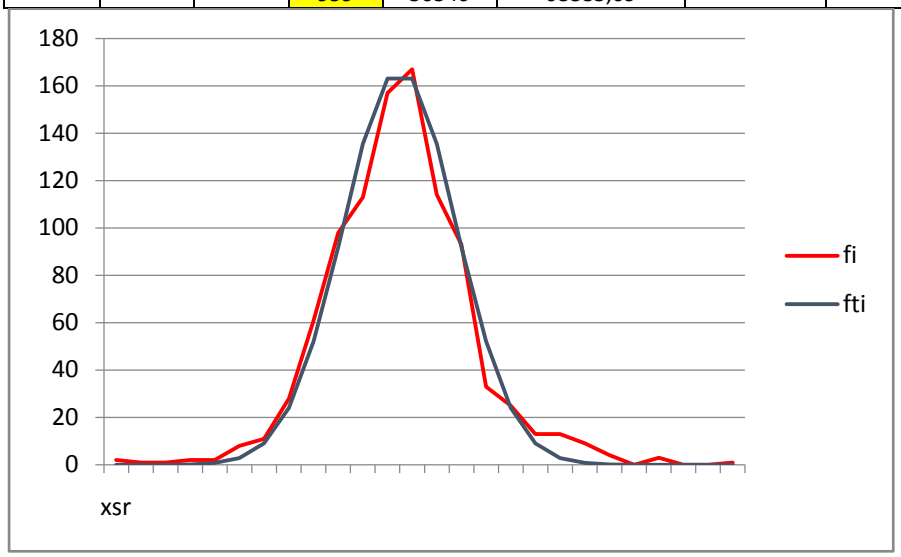
$$S = \sqrt{\frac{1}{N}\sum f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{68883{,}63}{959}} = 8{,}475$$

Корекција на стандардно отстапување заради ширина на класа

$$S_{kor} = \frac{4}{5} S = 6{,}78$$

ТЕОРИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ И СТАТИСТИКА ВО СООБРАЌАЈОТ

						Normirana normalna			
x_1	x_2	x_{sr}	f_i	x_{sr} f_i	$(x_{sr}$-mi)^2*f_i	t_1	t_2	p_i	f_{ti}
16,5	19,5	18	2	36	2379,42	-5,30847	-4,866	3E-08	2,88E-05
19,5	22,5	21	1	21	991,76	-4,866	-4,42353	3,97E-06	0,003807
22,5	25,5	24	1	24	811,80	-4,42353	-3,98106	3,7E-05	0,035483
25,5	28,5	27	2	54	1299,70	-3,98106	-3,53859	0,00014	0,13426
28,5	31,5	30	2	60	1011,80	-3,53859	-3,09613	0,0008	0,7672
31,5	34,5	33	8	264	3039,56	-3,09613	-2,65366	0,003	2,877
34,5	37,5	36	11	396	2991,91	-2,65366	-2,21119	0,0095	9,1105
37,5	40,5	39	28	1092	5097,09	-2,21119	-1,76872	0,0251	24,0709
40,5	43,5	42	61	2562	6715,24	-1,76872	-1,32625	0,0544	52,1696
43,5	46,5	45	98	4410	5501,01	-1,32625	-0,88378	0,0958	91,8722
46,5	49,5	48	113	5424	2280,30	-0,88378	-0,44132	0,1412	135,4108
49,5	52,5	51	157	8007	349,58	-0,44132	0,001153	0,17	163,03
52,5	55,5	54	167	9018	379,68	0,001153	0,443622	0,17	163,03
55,5	58,5	57	114	6498	2316,53	0,443622	0,88609	0,1412	135,4108
58,5	61,5	60	93	5580	5242,17	0,88609	1,328559	0,0958	91,8722
61,5	64,5	63	33	2079	3643,67	1,328559	1,771027	0,0544	52,1696
64,5	67,5	66	25	1650	4561,53	1,771027	2,213496	0,0251	24,0709
67,5	70,5	69	13	897	3542,61	2,213496	2,655965	0,0095	9,1105
70,5	73,5	72	13	936	4947,22	2,655965	3,098433	0,003	2,877
73,5	76,5	75	9	675	4559,42	3,098433	3,540902	0,0008	0,7672
76,5	79,5	78	4	312	2602,60	3,540902	3,98337	0,00014	0,13426
79,5	82,5	81	0	0	0,00	3,98337	4,425839	3,7E-05	0,035483
82,5	85,5	84	3	252	2978,23	4,425839	4,868307	3,97E-06	0,003807
85,5	88,5	87	0	0	0,00	4,868307	5,310776	3E-08	2,88E-05
88,5	91,5	90	0	0	0,00	5,310776	5,753244	0	0
91,5	94,5	93	1	93	1640,88	5,753244	6,195713	0	0
			959	50340	68883,69				



5.4 Гама, бета и хи-квадрат распределба

За да ги дефинираме овие распределби, најпрво да дефинираме неколку специфични функции.

Гама функцијата или Ојлерова функција од втор вид, има облик:

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt \qquad p>0$$

Гама функцијата ги поседува следните важни својства:

1.

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$$

Ако p е природен број p = n тогаш

$$\Gamma(n+1)=n\cdot\Gamma(n)=n\cdot(n-1)\cdot\Gamma(n-1)\ldots\ldots\ldots\ldots=n!$$

При решавање на задачи корисно е да се знае дека за големи вредности на n може да се користи Стирлинговата формула

$$\Gamma(n+1)=n!\approx\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}$$

2.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt=2\int_0^{\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$$

3.

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad 0<p<1$$

4.

За n < 0 гама функцијата е еднаква на

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

Бета функцијата B(p,q) е Ојлерова функција од прв вид и се дефинира со интегралот

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \qquad p>0 \;\; q>0$$

Гама и бета функциите се поврзани со следната релација:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Случајна променлива X има **гама распределба** ако има следна функција на густина

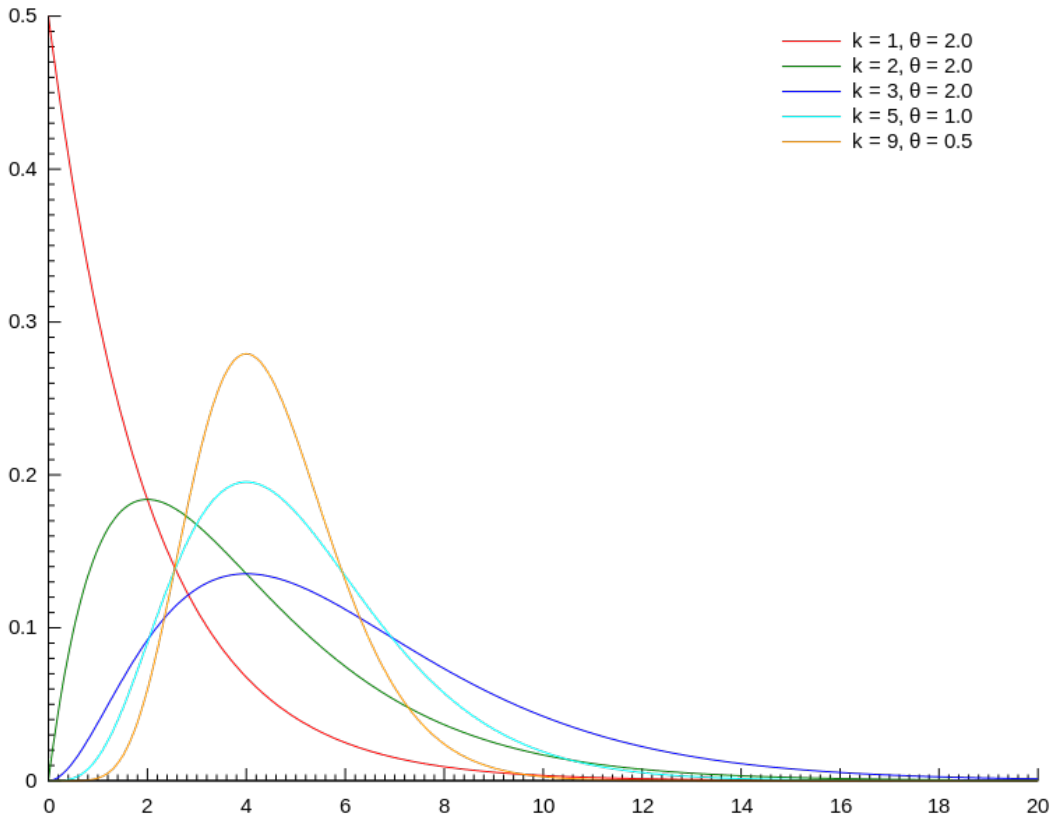
$$f(x,p,\lambda)=\frac{\lambda}{\Gamma(p)}(\lambda x)^{p-1}e^{-\lambda x} \qquad x>0 \quad \lambda>0 \quad p>0$$

Математичкото очекување и дисперзијата на Гама распределбата се

$$M(X)=\frac{p}{\lambda}$$

$$D(X) = \frac{p}{\lambda^2}$$

За p = 1 Гама распределбата станува експоненцијална распределба.



Гама распределбата со параметри

$$p = \frac{n}{2} \qquad \lambda = \frac{1}{2}$$

$$f(x, p, \lambda) = \frac{\lambda}{\Gamma(p)}(\lambda x)^{p-1} e^{-\lambda x}$$

$$f(y, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}(\frac{1}{2}y)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \qquad za\ \ 0 < y < \infty$$

има посебно значење во статистиката, и се нарекува **хи-квадрат распределба** со параметар **n** кој се нарекува степен на слобода. Случајно променливата која има хи-квадрат распределба се бележи со χ^2.

Математичкото очекување и дисперзијата на хи-квадрат распределбата се

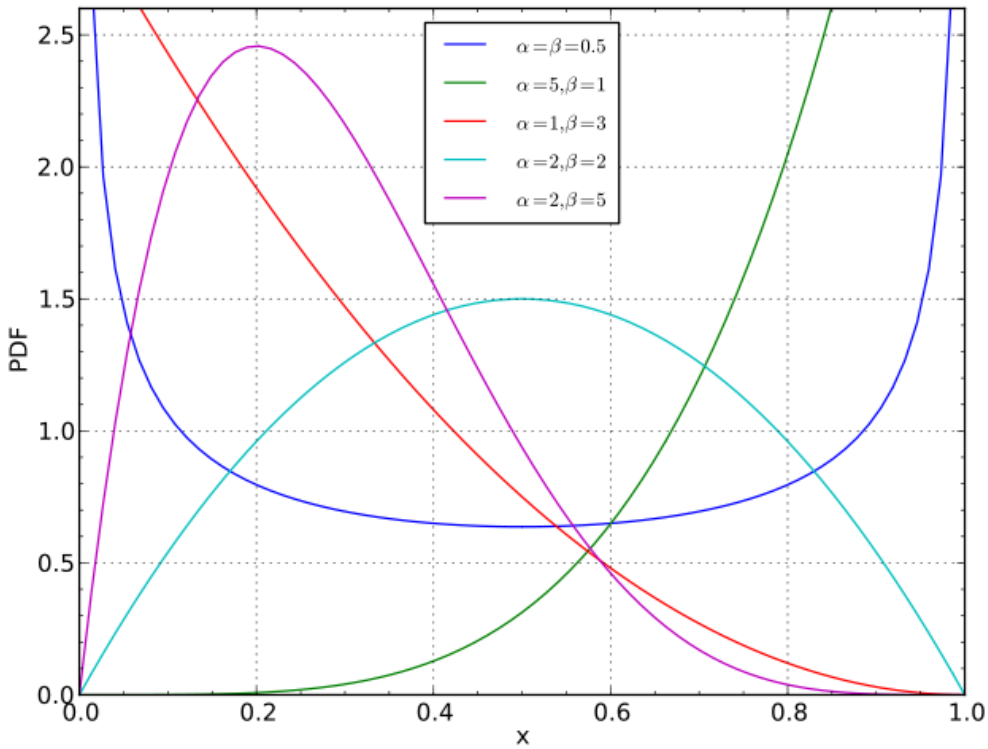
$$M(\chi^2) = n$$

$$D(\chi^2) = 2n$$

За хи-квадрат распределбата е интересно дека кога n тежи кон бесконечност, таа тежи кон нормална распределба. Всушност веќе за n > 30 хи-квадрат распределбата може да се замени со нормална распределба со доволна точност.

Случајна променлива X има **Бета распределба** ако нејзината густина на распределба е

$$f(x,p,q)=\frac{1}{B(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1} \qquad 0<x<1$$



Математичкото очекување и дисперзијата на хи-квадрат распределбата се

$$M(X)=\frac{1}{1+\frac{q}{p}}$$

$$D(X)=\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

5.5 Студентова распределба

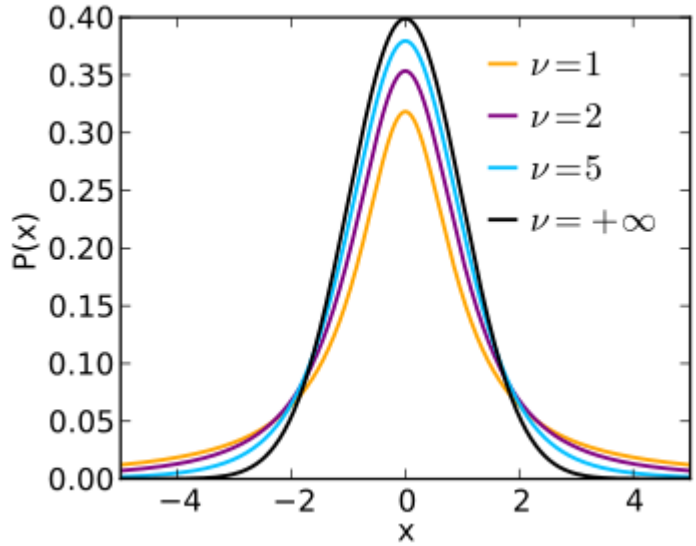
Студентовата распределба е дефинирана со следната функција на густина

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{n\cdot\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad -\infty<t<\infty$$

Во оваа распределба случајно променливата T е еднаква на

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

каде случајно променливата X има нормална распределба N(0,1), а Y хи-квадрат распределба со параметар n. Студентовата распределба има само еден параметар n кој се нарекува број на степени на слобода.



Својства на студентовата распределба:

1. Функцијата на густина е симетрична во однос на ординатата

2. Апцисната оска е асимптота на функцијата на густина кога

$t \to \pm \propto$

3. Функцијата има максимум за t = 0 т.е Mo = 0

Математичкото очекување, модата и медијаната се еднакви:

$$M(T) = Me = Mo = 0$$

а дисперзијата е

$$D(T) = \frac{n}{n-2} \qquad n > 2$$

Теорема: Студентовата распределба тежи кон нормална распределба N(0,1) кога

$n \to \propto$

Практично за n > 30 Студентовата распределба со доволна точност може да се апроксимира со нормална распределба. Затоа во табелите за студентова распределба се дадени вредностите до n = 30 за кои:

$P(|t| > t_\alpha) = \alpha$