РАМНИНСКИ ПРОБЛЕМ НА ЕЛАСТИЧНОСТА ВО ПАРАБОЛИЧНИ КООРДИНАТИ

Ред. проф. д-р Дејан Трајковски

Технички факултет – Битола
Универзитет „Св. Климент Охридски“ – Битола
Ул. Иво Лола Рибар бб, 7000 Битола, Македонија
+389 47 207 753
dejan.trajkovski@uklo.edu.mk

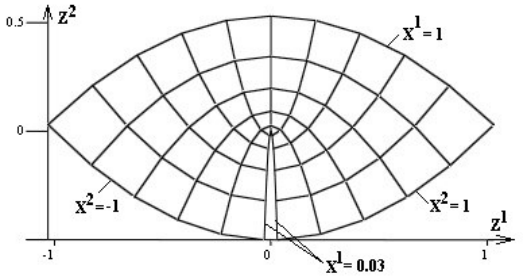
АБСТРАКТ

Со примена на методите на тензорската анализа се изведени во параболички координати основните равенки на материјалниот тензор на релативната деформација, пресечните сили и диференцијалните равенки на теоријата на плочи оптоварени во рамнина. Диференцијалните равенки и граничните услови се изразени во контраваријантна форма, но и преку физичките координати на тензорите.

Клучни зборови: параболични координати, тензор, рамнински проблем, еластичност, плоча

1. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА КООРДИНАТИТЕ

Основната потешкотија при аналитичкото решавање на контурните проблеми од теоријата на еластичноста во случај на области со неправоаголни контури се состои во задоволувањето на граничните услови на криволиниската граница. Класичен начин за надминување на овој проблем е преминот на генерализирани координати, чии координатни линии се поклопуваат со контурата.



Сл. 1 Област со параболична контура

Кај области ограничени со лаци од параболи најпогоден би бил преминот од параболични координати (X^1,X^2) на Декартови координати (Z^1,Z^2) со помош на трансформациите:

$$Z^1 = X^1 \cdot X^2 \,,\; Z^2 = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(X^1\right)^2 - \left(X^2\right)^2 \right] \qquad (1)$$

Областа прикажана на сл.1 е дефинирана на следниот како:
$\Omega = \left\{ \left(0 \le X^1 \le 1\right) \cap \left(-1 \le X^2 \le 1\right) \right\}$, односно правоаголната област со помош на конформното пресликување $w(z) = z^2$, (1), е трансформирана во област со параболични контури (сл. 1)

Базните вектори на параболичниот координатен систем, разложени на компоненти во насоките на единечните вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ во Декартовиот координатен систем се:

$$\vec{g}_k = \alpha_k^l \cdot \vec{e}_l = \frac{\partial Z^l}{\partial X^k} \cdot \vec{e}_l \text{ , односно } \quad \vec{g}_1 = X^2 \cdot \vec{e}_1 + X^1 \cdot \vec{e}_2 \text{ , } \vec{g}_2 = X^1 \cdot \vec{e}_1 - X^2 \cdot \vec{e}_2 \tag{2}$$

Основниот метрички тензор поради ортогоналноста на координатите има дијагонална форма:

$$g_{kl} = \vec{g}_k \vec{g}_l = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial Z^i}{\partial X^k} \frac{\partial Z^i}{\partial X^l} = \begin{bmatrix} \left(X^1\right)^2 + \left(X^2\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(X^1\right)^2 + \left(X^2\right)^2 \end{bmatrix} \quad , \tag{3}$$

каде $g_{11} = g_{22} = h_1^2 = h_2^2 = \left(X^1\right)^2 + \left(X^2\right)^2 = \rho$. Ламеовите коефициенти се:

$$h_1 = h_2 = h = \sqrt{\rho} = \sqrt{\left(X^1\right)^2 + \left(X^2\right)^2} \quad ; \frac{h_1}{h_2} = 1 \quad , h_1 \cdot h_2 = \rho \tag{4}$$

Со инверзија на матрицата g_{kl} се добива матрицата на основниот контраваријантен метрички тензор:

$$g^{kl} = \begin{bmatrix} 1/\rho & 0 \\ 0 & 1/\rho \end{bmatrix} \tag{5}$$

Кристофеловите симболи од прв и втор вид за параболичниот координатен систем се:

$$\Gamma_{ij,k} = [ij,k] = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right) \quad , \left(\partial_i(...) = \frac{\partial(...)}{\partial X^i}\right) \quad ; \Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ i \quad j \end{matrix} \right\} = g^{kh} \cdot [ij,h]$$

$$\Gamma_{11,1} = \Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = -\Gamma_{22,1} = X^1 \qquad \Gamma_{12,1} = \Gamma_{21,1} = \Gamma_{22,2} = -\Gamma_{11,2} = X^2$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{X^1}{\rho} \qquad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{X^2}{\rho} \tag{6}$$

2. МАТЕРИЈАЛЕН (ГРИНОВ) ТЕНЗОР НА РЕЛАТИВНАТА ДЕФОРМАЦИЈА

Гриновиот тензор на релативната деформација во коваријантна форма, според теоријата на големи деформации [4] ќе биде:

$$E_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) + \frac{1}{2} g_{nm} u_{,k}^n u_{,l}^m = \frac{1}{2}\left[\left(g_{km} u^m\right)_{,l} + \left(g_{lm} u^m\right)_{,k}\right] + \frac{1}{2} g_{nm} u_{,k}^n u_{,l}^m \tag{7}$$

каде u^k и $u_l = g_{lk} u^k$ се контаваријантниот и коваријантниот вектор на поместувањето, а со $(...)_{,l}$ е означено коваријантно диференцирање по координатата X^l.

Во склад со Ричиевата теорема за извод на метричкиот тензор [1]:

$$g_{km,l} = \frac{\partial g_{km}}{\partial X^l} - g_{rm}\Gamma_{kl}^r - g_{kr}\Gamma_{ml}^r = \frac{\partial g_{km}}{\partial X^l} - \Gamma_{lk,m} - \Gamma_{ml,k} = 0 \ , \tag{8}$$

ќе биде:

$$E_{kl} = \frac{1}{2}\left(g_{km} u_{,l}^m + g_{lm} u_{,k}^m\right) + \frac{1}{2} g_{nm} u_{,k}^n u_{,l}^m \text{ , односно: } \quad E_{11} = \rho \cdot u_{,1}^1 + \frac{\rho}{2} \cdot \left[\left(u_{,1}^1\right)^2 + \left(u_{,1}^2\right)^2\right] \ ,$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{\rho}{2} \cdot \left(u_{,2}^1 + u_{,1}^2\right) + \frac{\rho}{2} \cdot \left(u_{,1}^1 u_{,2}^1 + u_{,1}^2 u_{,2}^2\right) \ , \ E_{22} = \rho \cdot u_{,2}^2 + \frac{\rho}{2} \cdot \left[\left(u_{,2}^1\right)^2 + \left(u_{,2}^2\right)^2\right]. \tag{9}$$

Контраваријантните координати на векторот u^i се изразени во однос на базните вектори $\vec{g}_i$ коишто не се единечни. Физичките (нормализираните) координати ќе ги добиеме ако векторот го разложиме на единечни базни вектори:

$$\lambda_{(M)}^i = \frac{1}{\sqrt{g_{MM}}} \delta_M^i \qquad \text{(да не се сумира по индексот M!)}$$

$$u_{(M)} = g_{ij} u^i \lambda^j_{(M)} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{MM}}} \delta^j_M u^i \;\; ; \; u_{(1)} = u = \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{11}}} u^1 = \sqrt{\rho} \cdot u^1 \;\; , \; u_{(2)} = v = \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{22}}} u^2 = \sqrt{\rho} \cdot u^2 \tag{10}$$

Слично се добива врската меѓу коваријантните $\left(E_{kl}\right)$ и физичките $\left(E_{(kl)}\right)$ координати на тензорот на деформациите:

$$E_{(kl)} = \lambda^i_{(k)} \lambda^j_{(l)} E_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{MM}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{NN}}} \cdot \delta^i_M \cdot \delta^i_N \cdot E_{ij}$$, односно:

$$E_{(11)} = \lambda^1_{(1)} \lambda^1_{(1)} E_{11} = \frac{1}{\rho} E_{11} \;\; , \; E_{(12)} = E_{(21)} = \lambda^1_{(1)} \lambda^2_{(2)} E_{12} = \frac{1}{\rho} E_{12} \;\; , \; E_{(22)} = \lambda^2_{(2)} \lambda^2_{(2)} E_{22} = \frac{1}{\rho} E_{22} \tag{11}$$

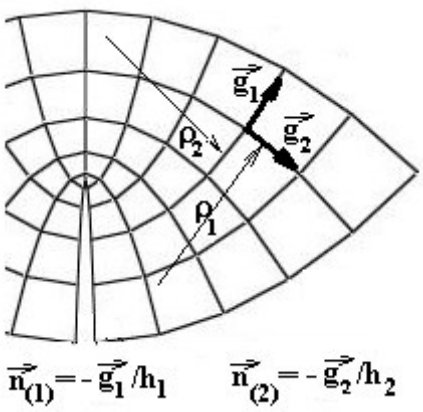
Коваријантните изводи на векторот u^i се [1]:

$$u^k_{,l} = \frac{\partial u^k}{\partial X^l} + u^n \Gamma^k_{nl} \;\; ; \quad \text{k,l=1,2} \tag{12}$$

Ако ги смениме контраваријантните со физичките координати на векторот на поместувањето во (12) добиваме:

$$u^1_{,1} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial u}{\partial X^1} + \frac{X^2}{\rho} \cdot v \right), \; u^1_{,2} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial u}{\partial X^2} - \frac{X^1}{\rho} \cdot v \right), \; u^2_{,1} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial v}{\partial X^1} - \frac{X^2}{\rho} \cdot u \right) \;\; , \;\; u^2_{,2} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial v}{\partial X^2} + \frac{X^1}{\rho} \cdot u \right) \tag{13}$$

3. ЗАКРИВЕНОСТ НА КООРДИНАТНИТЕ ЛИНИИ



Сл. 2. Базни вектори, нормали и радиуси на кривините на координатните линии

На координатната линија $X^1 = const$ да ги воочиме единечниот вектор на тангентата $\vec{t}_{(1)} = \vec{g}_2 / h_2$ и нормалата $\vec{n}_{(1)} = -\vec{g}_1 / h_1$ (сл. 2). Кривината κ_1 може да се одреди како интензитет на изводот на ортот на тангентата по параметарот $s_{(1)}$ од лакот:

$$\frac{d\vec{t}_{(1)}}{ds_{(1)}} = \kappa_1 \cdot \vec{n}_{(1)} \;\; \text{или:} \;\; \kappa_1 = \vec{n}_{(1)} \cdot \frac{d\vec{t}_{(1)}}{ds_{(1)}} \tag{14}$$

Во Евклидскиот дводимензионален простор во однос на евклидски координатен систем апсолутниот (Бјанкиев) извод по лакот е идентичен со обичниот [3]:

$$\kappa_1 = \vec{n}_{(1)} \frac{\delta \vec{t}_{(1)}}{\delta s_{(1)}} = n_{(1)i} \frac{dt^i_{(1)}}{ds_{(1)}} \tag{15}$$

каде: $t^1_{(1)} = 0$, $t^2_{(1)} = \frac{1}{h_2} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$,

$$n^1_{(1)} = -\frac{1}{h_1} = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} \;\; , \; n^2_{(1)} = 0 \;\; , \; n_{(1)1} = -\sqrt{\rho} \;\; , \; n_{(1)2} = 0$$

На ист начин ја наоѓаме кривината κ_2 на кривата $X^2 = const$:

$$\kappa_2 = n_{(2)i} \frac{\delta \vec{t}^{\,i}_{(2)}}{\delta s_{(2)}} \;\; ; \; \vec{t}_{(2)} = \vec{g}_1 / h_1 \, , \; \vec{n}_{(2)} = -\vec{g}_2 / h_2 \, , \; t^1_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \, , \; t^2_{(2)} = 0 \, ,$$

$$n^1_{(2)} = 0 \, , \; n^2_{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} \, , \; n_{(2)1} = 0 \, , \; n_{(2)2} = -\sqrt{\rho} \tag{16}$$

Ги бараме апсолутните (Бјанкиеви) изводи на ортовите од тангентите, водејќи сметка дека диференцијалот од лакот е $ds_{(1)} = h_2 \cdot dX^2$, од каде $\frac{dX^2}{ds_{(1)}} = \frac{1}{h_2} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ и $\frac{dX^1}{ds_{(1)}} = 0$. Аналогно, $ds_{(2)} = h_1 \cdot dX^1$, од каде $\frac{dX^1}{ds_{(2)}} = \frac{1}{h_1} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ и $\frac{dX^2}{ds_{(2)}} = 0$.

$$\kappa_1 = \frac{1}{\rho_1} = n_{(1)i} \cdot \left[\frac{dt^i_{(1)}}{dX^j} + t^k_{(1)} \cdot \Gamma^i_{jk} \right] \cdot \frac{dX^j}{ds_{(1)}} = n_{(1)1} \cdot t^2_{(1)} \cdot \Gamma^1_{22} \cdot \frac{dX^2}{ds_{(1)}} = -\sqrt{\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{-1}{\rho} X^1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{X^1}{\rho^{3/2}} = \frac{1}{\rho_1}$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{\rho_2} = n_{(2)i} \cdot \left[\frac{dt^i_{(2)}}{dX^j} + t^k_{(2)} \cdot \Gamma^i_{jk} \right] \cdot \frac{dX^j}{ds_{(2)}} = n_{(2)2} \cdot t^1_{(2)} \cdot \Gamma^2_{11} \cdot \frac{dX^1}{ds_{(2)}} = -\sqrt{\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{-1}{\rho} X^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{X^2}{\rho^{3/2}} = \frac{1}{\rho_2} \tag{17}$$

Тука ρ_1 и ρ_2 се радиуси на кривините на координатните линии. При наоѓањето на апсолутните изводи во рав. (17) е внесено $dt^i_{(1)} / dX^j = dt^i_{(2)} / dX^j = 0$ бидејќи интензитетот на ортовите е непроменлив.

Физичките координати на тензорот на инфинитезималната деформација, добиени со смена на равенката (13) во (9), со оглед на (11) и (17), со занемарување на членот $(1/2) g_{nm} u^n_{,k} u^m_{,l}$ како мала големина од повисок ред, добиваат едноставна форма:

$$E_{(11)} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{\partial u}{\partial X^1} + \frac{v}{\rho_2} \;,\; E_{(22)} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{\partial v}{\partial X^2} + \frac{u}{\rho_1} \;,\; E_{(12)} = E_{(21)} = \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial X^2} + \frac{\partial v}{\partial X^1} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u}{\rho_2} + \frac{v}{\rho_1} \right) \tag{18}$$

4. ОПШТ ПРОБЛЕМ НА РАМНИНСКИ НАПРЕГАЊА - – РАМНИНСКИ ТОВАРЕНА ПЛОЧА

4.1. Метода на деформации

Проблемот на плоча товарена во својата рамнина, сведен на геометриските непознати (поместувањата), е опишан со следната векторска диференцијална равенка [4]

$$\frac{1+\nu}{2} \cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{u}) + \frac{1-\nu}{2} \cdot \Delta\vec{u} + \frac{\vec{F}}{K} = 0 \;, \tag{19}$$

каде $\vec{u}$ е вектор на поместувањето, $\vec{F}$ [N/m] е вектор на волуменските сили сведени на единица површина од плочата. $K=Eh/(1-\nu^2)$ е цилиндрична крутост на затегање на плочата.

Равенката 19 во тензорска контраваријантна форма гласи:

$$\frac{1+\nu}{2} \cdot u^{k\ i}_{,k.} + \frac{1-\nu}{2} \cdot u^{i\ \ k}_{,k.} + \frac{1}{K} \cdot F^i = 0 \tag{19a}$$

каде со долна точка е означено контраваријантно подигање на индекс.

Со премин на физичките координати $u_{(1)}=u$ и $u_{(2)}=v$ на векторот $\vec{u}$, ги развиваме диференцијалните изрази $u^k_{,k}, u^{k\ i}_{,k.}, u^{i\ \ k}_{,k.}$ во параболички координати.

$$u^k_{,k} = \mathrm{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u^k}{\partial X^k} + u^i \cdot \Gamma^k_{ik} = \left| \Gamma^k_{ik} = \frac{\partial}{\partial X^i}\left(\log\sqrt{g}\right),\; g = \det\left(g_{ij}\right) = \rho \right| = \frac{\partial u^k}{\partial X^k} + u^k \cdot \frac{\partial}{\partial X^k}\left(\log\sqrt{g}\right) =$$

$$= \frac{\partial u^k}{\partial X^k} + u^k \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial X^k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\sqrt{g} \frac{\partial u^k}{\partial X^k} + u^k \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial X^k} \right] = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial X^k}\left(u^k \cdot \sqrt{g}\right) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial X^k}\left(u^k \cdot \rho\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial X^1}\left(\frac{u}{\sqrt{\rho}} \cdot \rho \right) + \frac{\partial}{\partial X^2}\left(\frac{v}{\sqrt{\rho}} \cdot \rho \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\partial_1 u + \partial_2 v\right) + \frac{1}{\rho^{3/2}} \cdot \left(X^1 \cdot u + X^2 \cdot v\right) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\partial_1 u + \partial_2 v\right) + \frac{u}{\rho_1} + \frac{v}{\rho_2}$$

односно, со оглед на равенката (17):

$$u^k_{,k} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\partial_1 u + \partial_2 v\right) + \frac{u}{\rho_1} + \frac{v}{\rho_2} \tag{20}$$

$$u^{k\ i}_{,k.} = g^{ij}\left(u^k_{,k}\right)_{,j} = g^{ij}\cdot\frac{\partial}{\partial X^j}\left(u^k_{,k}\right) = \frac{1}{\rho}\cdot\delta^{ij}\cdot\frac{\partial}{\partial X^j}\left(u^k_{,k}\right) = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial X^i}\left(u^k_{,k}\right) \tag{21}$$

$$u^{k\ 1}_{,k.} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial X^1}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial X^1} + \frac{\partial v}{\partial X^2}\right) + \frac{u}{\rho_1} + \frac{v}{\rho_2}\right] \ , \ u^{k\ 2}_{,k.} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial X^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial X^1} + \frac{\partial v}{\partial X^2}\right) + \frac{u}{\rho_1} + \frac{v}{\rho_2}\right] \tag{22}$$

$$u^{i\ k}_{,k.} = \Delta u^i = \frac{1}{\rho}\cdot\left[\frac{\partial^2 u^i}{\left(\partial X^1\right)^2} + \frac{\partial^2 u^i}{\left(\partial X^2\right)^2}\right] = \frac{1}{\rho}\cdot\left[\frac{\partial^2}{\left(\partial X^1\right)^2}\left(\frac{u_{(i)}}{\sqrt{\rho}}\right) + \frac{\partial^2}{\left(\partial X^2\right)^2}\left(\frac{u_{(i)}}{\sqrt{\rho}}\right)\right] \tag{23}$$

Контраваријантните координати на векторот на надворешните сили ги изразуваме преку физичките координати според равенката (10):

$$F^1 = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot F_{(1)} = \frac{U}{\sqrt{\rho}} \ , \ F^2 = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot F_{(2)} = \frac{V}{\sqrt{\rho}} \tag{24}$$

Равенката (19а), по смената на равенките (20) ... (24) и множењето $\rho^{1/2}$ добива форма:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\left(\partial_{11}u + \frac{1-\nu}{2}\partial_{22}u + \frac{1+\nu}{2}\partial_{12}v\right) - \frac{1-\nu}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial_1 u}{\rho_1} + \frac{\partial_2 u}{\rho_2}\right) + \frac{1+\nu}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial_1 v}{\rho_2} - \frac{\partial_2 v}{\rho_1}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left[\nu\cdot\partial_1\left(\frac{1}{\rho_1}\right) - \frac{1-\nu}{2}\cdot\partial_2\left(\frac{1}{\rho_2}\right)\right]\cdot u + \frac{1+\nu}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\partial_1\left(\frac{1}{\rho_2}\right)\cdot v + \frac{U}{K} = 0 \tag{25/1}$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\left(\frac{1+\nu}{2}\partial_{12}u + \frac{1-\nu}{2}\partial_{11}v + \partial_{22}v\right) + \frac{1+\nu}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial_2 u}{\rho_1} - \frac{\partial_1 u}{\rho_2}\right) - \frac{1-\nu}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(\frac{\partial_1 v}{\rho_1} + \frac{\partial_2 v}{\rho_2}\right) +$$

$$+\frac{1+\nu}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\partial_2\left(\frac{1}{\rho_1}\right)\cdot u + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left[-\frac{1-\nu}{2}\cdot\partial_1\left(\frac{1}{\rho_1}\right) + \nu\cdot\partial_2\left(\frac{1}{\rho_2}\right)\right]\cdot v + \frac{V}{K} = 0 \tag{25/2}$$

Системот равенки (25) бара два гранични услови по поместувањата или по силите:

$$N_{(11)} = h\cdot\sigma_{(11)} = K\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(\partial_1 u + \nu\cdot\partial_2 v\right) + \nu\cdot\frac{u}{\rho_1} + \frac{v}{\rho_2}\right] \ , \ N_{(22)} = h\cdot\sigma_{(22)} = K\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(\nu\cdot\partial_1 u + \partial_2 v\right) + \frac{u}{\rho_1} + \nu\cdot\frac{v}{\rho_2}\right]$$

$$N_{(12)} = h\cdot\sigma_{(12)} = K\cdot\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(\partial_2 u + \partial_1 v\right) - \left(\frac{u}{\rho_2} + \frac{v}{\rho_1}\right)\right] \tag{26}$$

4.2. Метода на сили

Проблемот на рамнински напрегања може да се решава и преку статичките величини. Изразувајќи го коваријантниот тензор на пресечните сили N_{ij} преку Ериевата (Airy) напонска функција Φ, под претпоставка дека векторот на надворешните сили F_i може да се изрази како градиент на некоја скаларна функција Π ,

$$N_{ij} = g_{ij}\cdot\left(\Phi_{,k.}{}^k + \Pi\right) - \Phi_{,ij} = g_{ij}\cdot\left(\Phi_{,k.}{}^k + \Pi\right) - \partial_{ij}\Phi + \partial_k\Phi\cdot\Gamma^k_{ij} \ , \ F_i = \Pi_{,i} = \partial_i\Pi = \rho\cdot F_{(i)} \ , \tag{27}$$

равенката на рамнотежата:

$$N^j_{i.,j} + F_i = 0 \tag{28}$$

ќе биде идентички задоволена, додека равенката за компатибилност на деформациите (изразена преку пресечните сили, а овие преку Ериевата напонска функција) ќе се сведе на бихармониската равенка:

$$\Delta\Delta\Phi + (1-\nu)\cdot\Delta\Pi = 0 \quad \text{односно:} \quad \frac{1}{\rho}\left(\partial_{11}+\partial_{22}\right)\left[\frac{1}{\rho}\left(\partial_{11}\Phi+\partial_{22}\Phi\right)\right] + \frac{1-\nu}{\rho}\left(\partial_{11}\Pi+\partial_{22}\Pi\right) = 0 \tag{29}$$

Кон диференцијалната равенка (29) потребно е да се приклучат два гранични услови по силите:

$$N_{(11)} = \frac{1}{\rho}N_{11} = \frac{1}{\rho}\partial_{22}\Phi + \frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\partial_1\Phi - \frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\partial_2\Phi + \Pi \qquad N_{(22)} = \frac{1}{\rho}N_{22} = \frac{1}{\rho}\partial_{11}\Phi - \frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\partial_1\Phi + \frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\partial_2\Phi + \Pi$$

$$N_{(12)} = \frac{1}{\rho}N_{12} = -\frac{1}{\rho}\partial_{12}\Phi + \frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\partial_1\Phi + \frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\partial_2\Phi \tag{30}$$

5. ЗАКЛУЧОК

Анализирајќи ги изразите (18), (25) и (26) забележуваме дека двете кривини $\kappa_{1,2} = 1/\rho_{1,2}$ како и поместувањата *u* и *v* и нивните изводи фигурираат во равенките за деформациите, диференцијалните равенки на рамнотежата и пресечните сили, што е последица на закривеноста на обете координатни линии, што не е случај кај правоаголните координати. Овој факт кажува дека во случај на општи (генерализирани) криволиниски координати особено внимание треба да се посвети на граничните услови, коишто треба да се изведат за секој координатен систем посебно.

Со примена на параболичните координати можат да се моделираат еднократно и двократно поврзани области ограничени со лакови од параболи и права линија, како и бесконечни области со отвори и пукнатини (проблем на концентрација на напрегањата). Во случај пукнатината на работ X^1=0 да е пополнета, граничните услови по поместувањата са сведуваат на услови на континуитет: $f(X^1=0,X^2)=f(X^1=0,-X^2)$, $\partial_1 f(X^1=0,X^2)=\partial_1 f(X^1=0,-X^2)$. Доколку постои бесконечно тесна пукнатина на X^1=0, споменатиот услов не мора да биде задоволен, односно се зема статички граничен услов по силите $N_{(11)}$=0 , $N_{(11)}$=0 по должината на пукнатината. Во случај на бесконечна област со отвор или пукнатина, граничните услови по функциите на поместувањата или Ериевите функции треба да се пуштат да тежнеат кон нула при оддалечување во бесконечност.

7. ЛИТЕРАТУРА

1. Andjelic T. – Tenzorski racun. Naucna knjiga, Beograd, 1987.
2. Биргер И. А. – Стержни, пластинки, оболочки. ФИЗМАТЛИТ-наука, Москва, 1992.
3. Маделунг Е. – Математическиј аппарат физики – справочное руководство. ГИФМЛ, Москва, 1961.
4. Naerlovic-Veljkovic N., Plavsic M. – Teorija elasticnosti. Naucna knjiga, Beograd, 1988.

PLANE PROBLEM OF ELASTICITY IN PARABOLIC CO-ORDINATES

ABSTRACT

By application of the theory of tensor analysis, basic equations for the strain tensor and differential equations of the plane problem of elasticity in parabolic coordinates have been developed. Differential equations and boundary conditions have been defined in both contra-variant and physical tensor form.

Key words: parabolic co-ordinates, tensor, plane problem, elasticity, plate